**UNIVERSITE LIBANAISE**
**FACULTE DE GENIE**

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

**Concours d'entrée 2007-2008** — **Durée : 3 heures**

# MATHEMATIQUES

**I-** On dispose d'une urne contenant $5$ boules rouges et $3$ boules noires et d'une pièce de monnaie pipée de façon que les probabilités de pile et face sont proportionnelles à $2$ et $3$.
Un joueur lance la pièce de monnaie.
Si la pièce de monnaie montre une pile, le joueur tire au hasard $2$ boules de l'urne.
Si la pièce de monnaie montre une face, le joueur tire au hasard $3$ boules de l'urne.
Le joueur gagne le jeu si toutes les boules tirées de l'urne sont rouges.
On considère les événements : ***F*** : " La pièce de monnaie montre une face "
***P*** : " La pièce de monnaie montre une pile " et ***G*** : " le joueur gagne le jeu " .

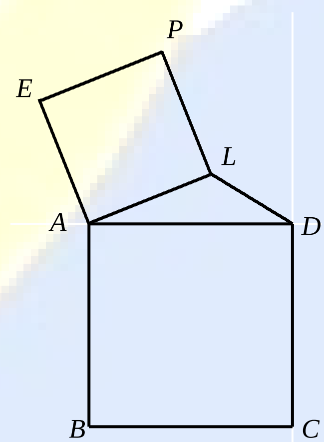
1- Montrer que la probabilité $p(F)$ de l'événement $F$ est égale à $0,6$ et calculer $p(P)$ .

2- Calculer $p(G/F)$, $p(G/P)$ et $p(G)$.

3- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:
***A*** : " La pièce de monnaie montre une face sachant que le joueur gagne le jeu ".
***B*** : " La pièce de monnaie montre une pile sachant que le joueur perd le jeu ".

4- On suppose dans cette partie que le joueur joue $n$ fois en remettant les boules tirées dans l'urne après chaque tirage.
a) Calculer, en fonction de $n$, la probabilité $p$ qu'il gagne le jeu au moins une fois
b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel $n$ tel que $p > 0.94$ .

**II-** Dans la figure ci-contre $ABCD$ et $ALPE$ sont deux carrés directs.
On considère la rotation $R = r(A\,;\frac{\pi}{2})$, la similitude $S = s(D\,;\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4})$ et leur composée $f = R\circ S$ .




1- Soit $O$ le centre du carré $ABCD$ .
a) Déterminer $f(C)$ et $f(O)$. En déduire le point $A' = f(A)$.
b) Montrer que $f$ est une similitude de centre $B$ dont on déterminera le rapport et l'angle.
c) Soit $L' = f(L)$ . Montrer que $\overrightarrow{A'L'} = \overrightarrow{AP}$ et placer $L'$.

2- Soit $g = \underbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\cdots\circ f}_{n\ fois}$ .
Déterminer l'entier naturel $n > 2$ tel que $g$ soit une homothétie .
Déterminer le rapport de cette homothétie suivant les valeurs de $n$ .

| |
|---|
| *Dans ce qui suit , on rapporte le plan au repère orthonormé direct* $(A\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ *tel que* $D(5\,;0)$ *et on suppose que* $L(3\,;2)$ . |

3- a) Déterminer les affixes $z_1$ et $z_2$ de $B$ et $E$ respectivement.

b) Calculer l'affixe $z_3$ du milieu $H$ de $[DL]$ et montrer que $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3}$ est un imaginaire pur.

c) En déduire que la médiane relative à $[DL]$ du triangle $ADL$ est une hauteur du triangle $ABE$.

4- a) Déterminer l'expression complexe de la similitude $f$.

b) Déterminer l'affixe de $L'$ et vérifier que $\overrightarrow{A'L'} = \overrightarrow{AP}$.

**III- *A*-**Soit $(H)$ l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 4$.

1- a) Déterminer les sommets et les asymptotes de $(H)$. Construire $(H)$.

b) Déterminer les foyers $F'$ et $F$ $(x_F > 0)$ et les directrices associées $(d')$ et $(d)$ de $(H)$.

2- Soit $P(x_0\ ;\ y_0)$ un point de $(H)$ et $(T)$ la tangente en $P$ à $(H)$.

$(T)$ coupe les asymptotes de $(H)$ en $R$ et $S$. Montrer que $P$ est le milieu de $[RS]$.

***B*-** Soit $(S)$ l'ensemble des points du plan dépourvu de l'origine $O$.

On désigne par $f$ l'application qui, à tout point $M(\alpha\ ;\ \beta)$ de $(S)$, associe la droite $(\Delta)$ d'équation $\alpha x - \beta y = 4$.

1- Soit $(\Delta)$ et $(\Delta')$ les droites associées à deux points distincts $M$ et $M'$ de $(S)$.

Montrer que si $(\Delta)$ passe par $M'$ alors $(\Delta')$ passe par $M$.

2- a) Montrer que la droite associée au foyer $F$ est la directrice $(d)$ de $(H)$.

b) Montrer que si $M$ appartient à $(d)$, alors $(\Delta)$ passe par $F$ et est perpendiculaire à $(MF)$.

c) Montrer que si $M$ appartient à $(H)$, alors $(\Delta)$ est la tangente en $M$ à $(H)$.

3- Soit $M$ un point donné sur la directrice $(d)$ de $(H)$.

a) Construire, sur la figure tracée, la droite $(\Delta)$ associée à $M$.

b) Décrire une construction géométrique des tangentes à $(H)$ issues de $M$.

**IV-*A*-** Soit $f$ la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ell n\, x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} + 1$.

1- a) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son domaine of définition.

b) Déterminer la dérivée $f'$ de $f$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{4(1 - \ell n\, x)}{x^3}$.

2- a) Dresser le tableau de variations de $f$.

b) Calculer $f(1)$ et déterminer le signe de $f(x)$.

c) Calculer $f(\sqrt{e})$. En déduire que $\begin{cases} \bullet\ \textit{Pour tout } t \in [\sqrt{e}\ ;+\infty[\ ,\ f(t) \geq 1 & (1) \\ \bullet\ \textit{Pour tout } t \in ]0\ ;\sqrt{e}\ ]\ ,\ f(t) \leq 1 & (2) \end{cases}$

**B-** Soit $g$ et $h$ les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\int_{\sqrt{e}}^{x} f(t)\,dt$ et $h(x)=\frac{e-2}{\sqrt{e}}+g(x)$.

1- a) En utilisant les inégalités **(1)** et **(2)** établies dans ***A***-2-c) , montrer que :
Pour tout $x$ de l'intervalle $]0\,;+\infty\,[$, $g(x)\geq\; x-\sqrt{e}$ .

b) En déduire que pour tout $x$ de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ , $h(x)\;\geq\; x-\frac{2}{\sqrt{e}}$ .

2- a) En utilisant une intégration par parties , calculer $\int_{\sqrt{e}}^{x}\frac{\ell n\, t}{t^2}dt$ où $x>0$ .

b) Déduire $\int_{\sqrt{e}}^{x} f(t)\,dt$ et montrer que $h(x)=x-\frac{1}{x}-\frac{2\ell n\, x}{x}$ .

3- Soit $(C)$ la courbe représentative de $h$ dans un repère orthonormé $(O\;;\vec{i}\;,\;\vec{j}\,)$ . ( ***Unité : 2 cm*** ) .

a) Déterminer une équation de la tangente $(d)$ à $(C)$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$ .

b) En utilisant les parties précédentes , déterminer la position relative de $(d)$ et $(C)$.

4- a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[h(x)-x]$ . En déduire que $(C)$ admet une asymptote oblique $(D)$ à $+\infty$.

b) Déterminer le point d'intersection de $(C)$ et $(D)$.

5- a) Dresser le tableau de variations de $h$.

b) Construire $(D)$, $(d)$ et $(C)$.

c) Calculer l'aire du domaine limité par $(C)$, $(D)$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

6- a) Montrer que la restriction de $h$ sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ admet une fonction réciproque $h^{-1}$.

b) La courbe $(C')$ de $h^{-1}$ admet une tangente $(d')$ parallèle à $(d)$. Déterminer leur point de contact et tracer $(d')$ et $(C')$ dans le même repère que $(C)$.

**UNIVERSITE LIBANAISE**
**FACULTE DE GENIE**

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

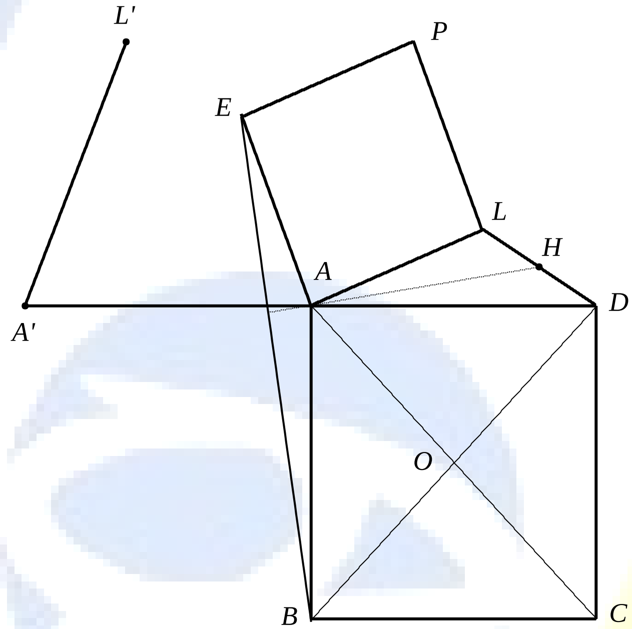
**Concours d'entrée 2007-2008** **Durée: 3 heures**

## Solution de Mathématique

Exercice 1

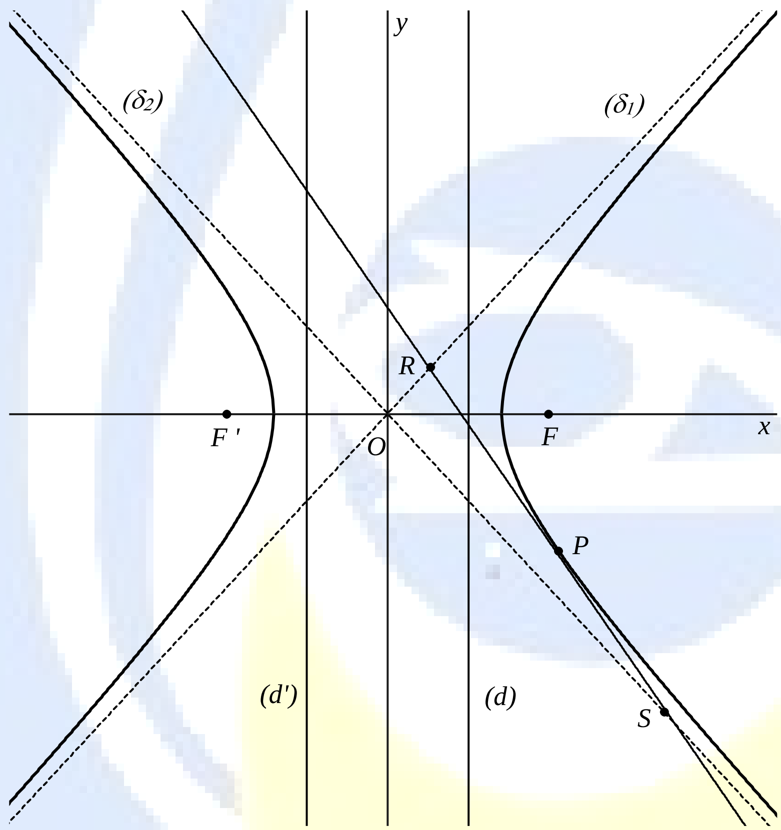
| | Eléments de réponses | Notes |
|---|---|---|
| 1 | $p(F)$ et $p(P)$ sont telles que $p(F)=3k$ , $p(P)=2k$ et $p(F)+p(P)=1$ .<br>D'où $k=\frac{1}{5}$ , $p(F)=\frac{3}{5}$ et $p(P)=\frac{2}{5}$ . | |
| 2 | Si $F$ est réalisé , le joueur tire 3 boules de l'urne qui contient 8 boules dont 5 sont rouges . Alors $p(G/F)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{5}{28}$ .<br>$p(G/P)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}$ .<br>$p(G)=p(F)\times p(G/F)+p(P)\times p(G/P)=\frac{3}{5}\times\frac{5}{28}+\frac{2}{5}\times\frac{5}{14}=\frac{1}{4}$ | |
| 3 | $p(A)=p(F/G)=\frac{p(G\cap F)}{p(G)}=\frac{p(F)\times p(G/F)}{p(G)}=\frac{3}{7}$ .<br>$p(B)=p(P/\overline{G})=\frac{p(\overline{G}\cap P)}{p(\overline{G})}=\frac{p(P)-p(G\cap P)}{p(\overline{G})}=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{12}{35}$ . | |
| 4a | $p=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$ . | |
| 4b | $p>0,94$ ; $\left(\frac{3}{4}\right)^n<0,06$ ; $n>9,77$ .<br>La plus petite valeur de $n$ tel que $p>0,94$ est $n=10$ . | |

Exercice 2

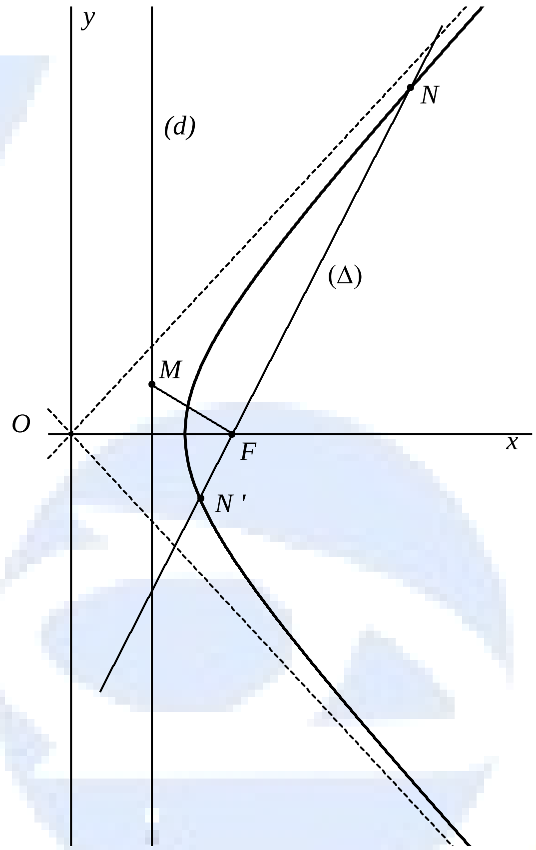
| | Eléments de réponses | Notes |
|---|---|---|
| 1a | $f(C) = R \circ S(C) = R(S(C))$<br>$\quad = R(B) = D$ .<br>$f(O) = R \circ S(O) = R(S(O))$<br>$\quad = R(A) = A$ .<br>Toute similitude conserve le milieu .<br>$O$ est le milieu de $[CA]$ alors $A$ est le milieu de $[DA']$.<br>$A'$ est le symétrique de $D$ par rapport à $A$ .<br> | |
| 1b | $f = R \circ S = Sim(A\,;1\,;\frac{\pi}{2}) \circ Sim(D\,;\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4}) = Sim(......;\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{4})$.<br>$f(C) = D$ ; $BD = \sqrt{2}\,BC$ et $(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$ , alors $B$ est le centre de $f$ . | |
| 1c | $f(L) = L'$ et $f(A) = A'$ , alors $A'L' = \sqrt{2}\,AL$ et $(\overrightarrow{AL}\,;\overrightarrow{A'L'}) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$.<br>Or $AP = \sqrt{2}\,AL$ et $(\overrightarrow{AL}\,;\overrightarrow{AP}) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$. Donc $\overrightarrow{A'L'} = \overrightarrow{AP}$ . | |
| 2 | $f = Sim(B\,;\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{4})$ alors $g = Sim(B\,;(\sqrt{2})^n\,;n\frac{\pi}{4})$ .<br>$g$ est une homothétie si, et seulement si , $n\frac{\pi}{4} = k\pi$ . D'où $n = 4k$ avec $k \in IN^*$ .<br>Le rapport de $g$ est $\begin{cases} (\sqrt{2})^n & si\ k\ est\ pair \\ -(\sqrt{2})^n & si\ k\ est\ impair \end{cases}$ . | |
| 3a | $z_A = 0$ ; $z_D = 5$ ; $z_B = -5i$ ; $z_L = 3+2i$ et $z_E = i\,z_L = -2+3i$ | |

| | | |
|---|---|---|
| 3b | Soit $H$ le milieu de $[DL]$ ; $z_H = \frac{z_D + z_L}{2} = 4 + i$ .<br>$\frac{z_1 - z_2}{z_3} = \frac{z_B - z_E}{z_H} = \frac{2 - 8i}{4 + i} = -2i$ qui est un imaginaire pur . | |
| 3c | $\frac{z_1 - z_2}{z_3} = \frac{z_B - z_E}{z_H - z_A}$ . Donc $\frac{z_B - z_E}{z_H - z_A}$ est un imaginaire pur . Par suite $(AH) \perp (BE)$.<br>Alors la médiane relative à $[DL]$ du triangle $ADL$ est une hauteur du triangle $ABE$ . | |
| 4a | La relation complexe de $f$ est $z' = (1+i)z - 5$ . | |
| 4b | $L' = f(L)$ et $z_L = 3 + 2i$, alors $z_L' = -4 + 5i$ . $A' = f(A)$ et $z_A = 0$, alors $z_A' = -5$.<br>$z_P = z_L + z_E = 1 + 5i$ alors $z_L' - z_A' = 1 + 5i = z_P - z_A$ . Par suite $\overrightarrow{A'L'} = \overrightarrow{AP}$ | |

Exercice 3

| | Eléments de réponses | Notes |
|---|---|---|
| A1a | $a=2$ et l'axe focal de $(H)$ est $x'x$ ; les sommets de $(H)$ sont $A(2;0)$ et $A'(-2;0)$.<br>Les asymptotes de $(H)$ sont $(\delta_1)$ : $y=x$ et $(\delta_2)$ : $y=-x$<br> | |
| A1b | $c=a\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ ; les foyers de $(H)$ sont $F(2\sqrt{2}\ ;0)$ et $F'(-2\sqrt{2}\ ;0)$.<br>$\frac{a^2}{c}=\sqrt{2}$ ; les directrices de $(H)$ sont $(d): x=\sqrt{2}$ et $(d'): x=-\sqrt{2}$ . | |
| A2 | $P(x_0\ ;\ y_0)\in(H)$ ; $(T)$ : $x_0x-y_0y=4$ ;<br>$(T)$ coupe $(\delta)$ en $R$ et $(\delta')$ en $S$ tels que | |

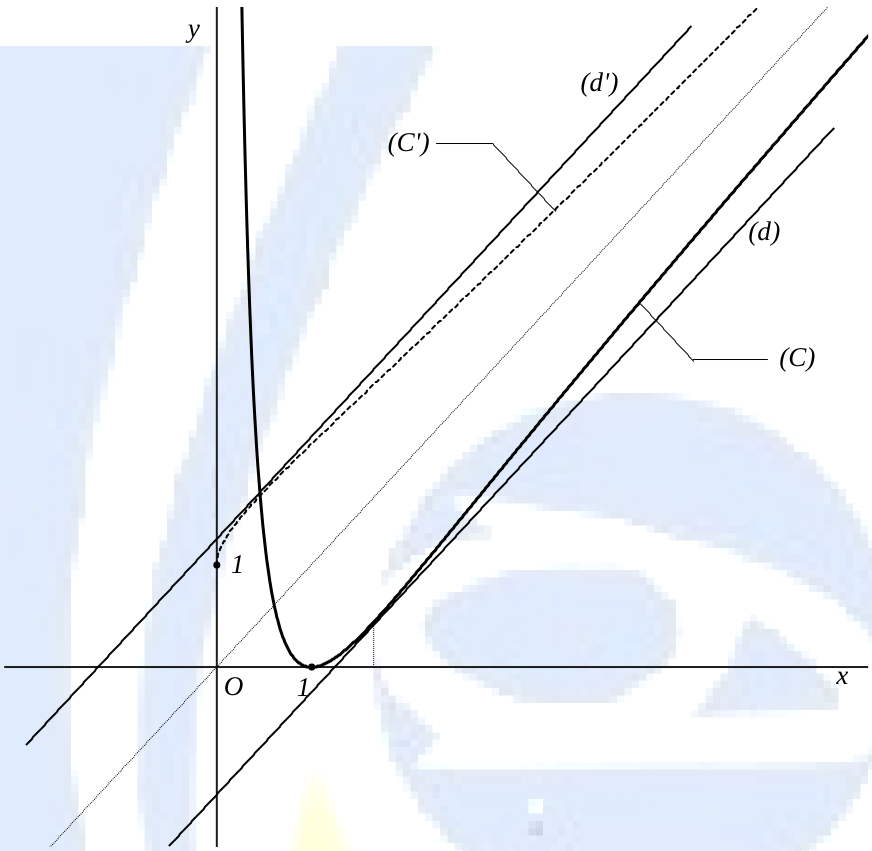
| | | |
|---|---|---|
| | $x_R = \dfrac{4}{x_0 - y_0}$ et $x_S = \dfrac{4}{x_0 + y_0}$ . $x_R + x_S = \dfrac{8x_0}{x_0^2 - y_0^2} = \dfrac{8x_0}{4} = 2x_0$ .<br>Puisque $P$ , $R$ et $S$ sont alignés , alors $P$ est le milieu de $[RS]$. | |
| B1 | La droite associée au point $M(\alpha\ ;\ \beta)$ est $(\Delta)$ : $\alpha x - \beta y = 4$ ;<br>La droite associée au point $M'(\alpha'\ ;\ \beta')$ est $(\Delta')$ : $\alpha' x - \beta' y = 4$.<br>Si $(\Delta)$ passe par $M'$ alors $\alpha\alpha' - \beta\beta' = 4$ , ce qui montre que $(\Delta')$ passe par $M$ . | |
| B2a | La droite associée au foyer $F(2\sqrt{2}\ ;\ 0)$ a pour équation $2\sqrt{2}\,x = 4$ ou $x = \sqrt{2}$ qui est la directrice $(d)$ associée au foyer $F$ . | |
| B2b | Si $M(\sqrt{2}\ ;\ \beta)$ alors $(\Delta)$ : $\sqrt{2}\,x - \beta y = 4$ ; $(\Delta)$ passe par $F$ .<br>$\overrightarrow{MF}\,(\sqrt{2}\ ;\ -\beta)$ est un vecteur normal de $(\Delta)$ ; alors $(\Delta)$ est perpendiculaire à $(MF)$. | |
| B2c | Si $M(\alpha\ ;\ \beta)$ appartient à $(H)$, une équation de la tangente en $M$ à $(H)$ est $\alpha x - \beta y = 4$ qui est une équation de la droite $(\Delta)$ associée à $M$ . | |

| | | |
|---|---|---|
| B3a | D'après B2b , la droite $(\Delta)$ associée au point $M$ de $(d)$ est la perpendiculaire en $F$ à $(MF)$ .   | |
| B3b | la droite $(\Delta)$ associée au point $M$ de $(d)$ coupe l'hyperbole $(H)$ en $N$ et $N'$.<br>La droite associée au point $N$ de $(H)$ est la tangente $(T)$ en $N$ à $(H)$ ( d'après B2b)<br>En plus , puisque la droite $(\Delta)$ associée au point $M$ passe par $N$ alors la droite $(T)$ associée au point $N$ passe par $M$ ( d'après B1) .<br>Par suite $(MN)$ est une tangente à $(H)$ passant par $M$ et , de même , $(MN')$ est une tangente à $(H)$ passant par $M$ .<br>Construction des tangentes à $(H)$ issues de $M$ :<br>On joint $M$ à $F$ et on trace la perpendiculaire en $F$ à $(MF)$ qui coupe l'hyperbole $(H)$ en deux points $N$ et $N'$. Les droites $(MN)$ et $(MN')$ sont les tangents à $(H)$ issues de $M$ . | |

Exercice 4

| | Eléments de réponses | Notes |
|---|---|---|
| A1a | $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-\dfrac{1}{x^2}+2\dfrac{\ell n\,x}{x^2}\right]=1$ | |
| A1b | $f\,'(x) = \dfrac{4(1-\ell n\,x)}{x^3}$ . | |
| A2a | <table><tr><td>$x$</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>e</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f\,'(x)$</td><td>||</td><td></td><td>+</td><td></td><td>0</td><td>−</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>|| $-\infty$</td><td>↗</td><td>0</td><td>↗</td><td>$1/e^2+1$</td><td>↘</td><td>1</td></tr></table> | |
| A2b | $f(1)=0$ ; $f(x)<0$ pour $x\in]0\,;1[$ et $f(x)>0$ pour $x\in]1\,;+\infty[$ | |
| A2c | $f(\sqrt{e})=1$ ;<br>Si $t\in[\sqrt{e}\ ;+\infty[$ , $f(t)\in f([\sqrt{e}\ ;+\infty[)=[1\,;1+e^{-2}]$ .<br>Si $t\in]0\,;\sqrt{e}]$ , $f(t)\in f(]0\,;\sqrt{e}])=]-\infty\,;1]$ . | |
| B1a | Si $x\in[\sqrt{e}\ ;+\infty[$, alors $t\in[\sqrt{e}\ ;+\infty[$ *et* $f(t)\geq 1$ . D'où $\int_{\sqrt{e}}^{x} f(t)\,dt \geq \int_{\sqrt{e}}^{x} dt = x-\sqrt{e}$ .<br>Si $x\in]0\,;\sqrt{e}]$, alors $t\in]0\,;\sqrt{e}]$ *et* $f(t)\leq 1$ . D'où $\int_{\sqrt{e}}^{x} f(t)\,dt \geq \int_{\sqrt{e}}^{x} dt = x-\sqrt{e}$ | |
| B1b | Pour tout $x$ de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ , $g(x) \geq x-\sqrt{e}$ alors $h(x) \geq x-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ . | |
| B2a | $\int_{\sqrt{e}}^{x}\dfrac{\ell n\,t}{t^2}\,dt = \dfrac{3}{2\sqrt{e}}-\dfrac{1+\ell n\,x}{x}$ | |
| B2b | $\int_{\sqrt{e}}^{x} f(t)\,dt = \int_{\sqrt{e}}^{x}\left(\dfrac{2\ell n\,t}{t^2}-\dfrac{1}{t^2}+1\right)dt = 2\int_{\sqrt{e}}^{x}\dfrac{\ell n\,t}{t^2}\,dt-\int_{\sqrt{e}}^{x}\dfrac{dt}{t^2}+\int_{\sqrt{e}}^{x}dt=\dfrac{2-e}{\sqrt{e}}+x-\dfrac{1}{x}-2\dfrac{\ell n\,x}{x}$ . | |

<table>
<tr><td></td><td>$h(x)=\dfrac{e-2}{\sqrt{e}}+\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{x} f(t)\,dt = x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2\ell n\, x}{x}$ .</td><td></td></tr>
<tr><td>B3a</td><td>$(d)\ :\ y = x-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ .</td><td></td></tr>
<tr><td>B3b</td><td>Puisque pour tout $x\in ]0\,;+\infty[$ , $h(x)\ \geq\ x-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ alors $(C)$ se trouve au-dessus de $(d)$ .</td><td></td></tr>
<tr><td>B4a</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty}[h(x)-x]=0$ . Alors la droite $(D)$ d’équation $y=x$ est asymptote à $(C)$ à $+\infty$</td><td></td></tr>
<tr><td>B4b</td><td>$h(x)=x$ équivaut à $\ell n\, x=-\dfrac{1}{2}$ . Alors $(C)\cap(D)=\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)\right\}$</td><td></td></tr>
<tr><td>B5a</td><td>$h'(x)=f(x)$<br><table><tr><td>$x$</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>+ 😐</td></tr><tr><td>$h'(x)$</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$h(x)$</td><td>+ 😐</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td><td>+ 😐</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| B5b |  | |
| B5c | $S=\int_1^e (x-h(x))dx=\int_1^e \left(\frac{1}{x}+2\frac{\ell n\, x}{x}\right)dx=\left[\ell n\, x+\ell n^2 x\right]_1^e=2\ unit\acute{e}s\ d'aire=8\ cm^2$. | |
| B6a | $h$ est continue et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$ ;<br>Alors $h$ admet une fonction réciproque $h^{-1}$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. | |
| B6b | $(C')$ est l'image de la partie de $(C)$ correspondant à $x\in[1\,;+\infty[$ par la symétrie par rapport à $(D)$.<br>La tangente $(d')$ parallèle à $(d)$ est l'image de $(d)$ par la symétrie par rapport à $(D)$.<br>Le point de contact de $(d)$ et $(C)$ étant $(\sqrt{e}\ ;\ \sqrt{e}-\frac{2}{\sqrt{e}})$, celui de $(d')$ et $(C')$ est alors | |

| | | |
|---|---|---|
| | $(\sqrt{e}-\frac{2}{\sqrt{e}}\ ;\ \sqrt{e})$ | |