UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2006-2007 **Mathématiques** **Durée : 3 heures**

La distribution des notes est sur 25

I-(2 pts) Le tableau ci-contre représente les variations d'une fonction continue f définie sur IR. On donne de plus que la courbe représentative (C) de f admet la droite y = x comme direction asymptotique à $+\infty$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		+		+	
$f'(x)$		+	½	+	
$f(x)$	0		1		$+\infty$

1-Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
2-Tracer (C) et (T).
3-Montrer que, pour tout x > 1, on a $(x+1)/2 < f(x) < x$.

II-(4 pts) Une urne contient 6 boules identiques : 4 rouges et 2 noires.
1- On tire au hasard 2 boules de cette urne. On considère les évènements suivants :
A_0 : *les deux boules tirées sont rouges*
A_1 : *les deux boules tirées sont de couleurs différentes.*
A_2 : *les deux boules tirées sont noires.*
Calculer la probabilité de chacun des évènements A_0, A_1, A_2.

2- Après le premier tirage, l'urne contient 4 boules. On en tire au hasard deux nouvelles boules.
On considère les évènements suivants :
B_0 : *les deux boules tirées sont rouges*
B_1 : *les deux boules tirées sont de couleurs différentes*.
B_2 : *les deux boules tirées sont noires*.
a) Calculer $p(B_0 / A_0)$, $p(B_0 / A_1)$ et $p(B_0 / A_2)$. En déduire que $p(B_0) = 0.4$
b) Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$
c) Sachant qu'une seule boule noire est tirée dans le second tirage, calculer la probabilité qu'une seule boule noire ait été tiré dans le premier tirage.

3- Calculer la probabilité pour que, après les deux tirages, les deux boules qui restent soient rouges.

III- (6 pts) Dans l'espace rapporte au repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\ \vec{j},\ \vec{k})$ on considère le point A (-1 ; 1 ; 0), le plan (P) d'équation x-2y +2z -6= 0 et la droite (D) définie par x = m+1 ; y = 2m+1 ; z = 3m+2.
1- Démontrer que A et (D) déterminent un plan (Q) dont on déterminera l'équation.
2- a) Démontrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (Δ) définie par x = 2 ; y = t-2 ; z = t.
b) Déterminer les coordonnées de A´ projeté orthogonal de A sur (Δ).
3- Soit M un point variable de (Δ). Désignons par α la mesure de l'angle que fait (AM) avec (P).
a) Démontrer que AM.sin α = 3
b) En déduire la position de M pour laquelle α est maximum et calculer sin α dans ce cas.
c) Que représente la valeur de α ainsi trouvée pour les deux plans (P) et (Q) ?
4- On désigne par (C) le cercle de centre A se trouvant dans (Q) et tangent à (Δ). Le projeté orthogonal de (C) sur (P) est une ellipse (E).
a) Calculer le rayon de (C).

b) Déterminer les coordonnées du centre de (E).
c) Calculer l'excentricité de (E).
d) Déterminer un système d'équation paramétrique de l'axe focal de (E).
e) Déterminer les coordonnées de chacun des deux foyers de (E).
f) Calculer l'aire du domaine compris entre (E) et son cercle principal.

IV- (6 pts) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$

On considère les points A_0, A_1 et A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5- 4i$, $z_1 = -1-4i$ et $z_2 = -4-i$. On désigne par S la similitude qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2

1-a) Déterminer le rapport de S.
b) Montrer que le point I (2 ; 2) est le centre du cercle (γ) circonscrit au triangle $A_0A_1A_2$.
c) Calculer le rayon de l'image de (γ) par (S).

2-a) Montrer que l'expression complexe de S est $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{i-3}{2}$.

b) Déduire l'angle de S et l'affixe d de son centre D.

3-Soit M un point quelconque d'affixe z, tel que z ≠ d, et M´ d'affixe z´ son image par S.
a) Déterminer la nature du triangle DMM´
b) Déduire que d - z´ = i (z - z´).

4-Soit (A_n) la suite de points de premier terme A_0 définie par $A_{n+1} = S(A_n)$
Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_n = A_n A_{n+1}$
a) Placer les points A_0, A_1 et A_2 et construire les points A_3, A_4 et A_5
b) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.

5-Soit m *un naturel donné*. On considère la suite (P_k) de points définis par $P_k = A_{m+4k}$
a) Montrer que tous les points P_k se trouvent sur une droite.
b) Montrer que pour tout naturel k, $P_{k+1} = H(P_k)$ ou H est une transformation que l'on déterminera.

V-(7 pts) **A.** On considère l'équation différentielle (1) $y' + 2y^2e^x - y = 0$ ou y est une fonction définie sur IR telle que pour tout réel x, y(x) ≠ 0.

On pose $z = \frac{1}{y}$ où z est une fonction dérivable définie sur IR.

1- Déterminer l'équation différentielle (2) satisfaite par z.
2- Résoudre l'équation (2) et en déduire la solution générale de (1).
3- Déterminer la solution particulière de (1) telle que $y(0) = \frac{1}{2}$

B. Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$. Désignons par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$

1- Montrer que f est une fonction paire.

2- Dresser le tableau de variations de f .

3-a) Dresser le tableau de variations de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

b) Déduire que l'équation $f(x) = x$ admet sur $[0 ; +\infty[$ une seule solution α. Vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$.

c) Tracer (C) (on suppose 1 unité = 4 cm).

4-a) Montrer que la restriction de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ admet une fonction réciproque f^{-1}.

b) Déterminer le domaine de définition de f^{-1} et calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

c) Tracer la courbe (γ) de f^{-1} dans le même repère que (C).

C. On considère la suite (V_n) définie sur IN par $V_n = \int_0^n f(x)dx$

1-a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) < e^{-x}$

b) Déduire que, pour tout naturel n, $V_n \leq 1 - e^{-n}$

2-a) Vérifier que $V_{n+1} - V_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

b) En déduire que la suite (V_n) est strictement croissante.

c) Montrer que la suite (V_n) converge vers une limite ℓ telle que $0 \leq \ell \leq 1$.

3-Verifier que $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$. Calculer alors V_n en fonction de n et déterminer ℓ

4- Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (γ), y′y, x′x et la droite d'équation $y = 2$.

UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2006-2007 **Solution de Mathématiques** **Durée : 3 heures**

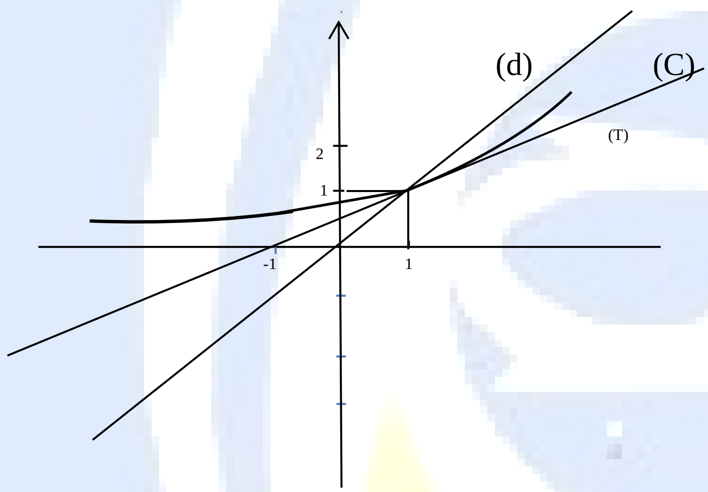
La distribution des notes est sur 25

Exercice I

1- Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1est $y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$

$f'(1) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = 1$ d'ou $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1)$

2-



x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	$+\infty$

3- Pour $x > 1$, la courbe représentative de f est au-dessus de la tangente et au-dessous de la droite d'équation $y = x$ donc $\frac{(x+1)}{2} < f(x) < x$

Exercise II

1- p(A_0)= $\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$

p(A_1)= $\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$

p(A_2)= $\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$

2-a) p(B_0 / A_0)= $\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$, p(B_0 / A_1)= $\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$, p($B_0$ / A_2)= 1

p(B_0) = p(B_0 / A_0).p(A_0) + p(B_0 / A_1).p(A_1)+ p(B_0 / A_2).p(A_2)= $\frac{1}{6}.\frac{2}{5}+\frac{1}{2}.\frac{8}{15}+\frac{1}{15}=\frac{2}{5}=0.4$

b) p(B_1) = p(B_1 / A_0).p(A_0) + p(B_1 / A_1).p(A_1)+ p(B_1 / A_2).p(A_2)= $\frac{2}{3}.\frac{2}{5}+\frac{1}{2}.\frac{8}{15}+0=\frac{8}{15}$

or p(B_1 / A_2) =0

p(B_2)= $\frac{1}{6}.\frac{2}{5}=\frac{1}{15}$

c) p(A_1/B_1) = $\frac{p(A_1\cap B_1)}{p(B_1)}=\frac{p(B_1/A_1)\times p(A_1)}{p(B_1)}=\frac{1}{2}$

3- p(2R)= p(A_0) x p(B_2 / A_0)+p(A_1) x p(B_1 / A_1)+ p(B_0 / A_2).p(A_2)= $\frac{2}{5}.\frac{1}{6}+\frac{1}{2}.\frac{8}{15}+1.\frac{1}{15}=\frac{2}{5}$

Exercise III

1) Le point A n’appartient pas à (d) car si -1 = m+1, 1= 2m+1, 0= 3m+2

   On aura m = -2, m = 0, m = $-\frac{2}{3}$

   Donc A et (d) déterminent un plan (Q).
   Soit B (1, 1, 2) un point de (d) et M(x, y, z) un point variable de (Q). Une équation de (Q) est
   $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\vec{v}_d)=0$ ce qui donne $x + y - z = 0$

2) a- $\vec{n}_p(1;-2;2)$ et $\vec{n}_Q(1;1;-1)$ ne sont pas colinéaires donc (P) et (Q) se coupent suivant une droite (Δ)
Soit M (2; t-2; t) un point variable de (Δ)
M $\in$ (P) car $x_M - 2y_M + 2z_M - 6 = 2 - 2t + 4 + 2t - 6 = 0$
M $\in$ (Q) car $x_M + y_M - z_M = 2 + t - 2 - t = 0$
Donc x = 2, y = t-2, z = t est un système d'équations paramétriques de (Δ).

b- A' est un point de (Δ) donc A' (2; t-2; t), $\vec{AA'}$ (3; t-3; t) et $\vec{v}_\Delta(0;1;1)$ sont orthogonaux, d'où
$\vec{AA'}.\vec{v}_\Delta = 0$ ce qui donne t-3+t = 0, d'où t = $\frac{3}{2}$ et par suite $A'(2;-\frac{1}{2};\frac{3}{2})$

3) a- Soit H le projeté orthogonal de A sur (P), l'angle que fait (AM) avec (P) n'est autre que $\widehat{AMH}$.

$\sin\alpha = \frac{\text{HA}}{\text{AM}}$ or $HA = d(A;P) = \frac{|-1-2-6|}{\sqrt{1+4+4}} = 3$

d'ou $\sin\alpha = \frac{3}{\text{AM}}$ et par suite $AM.\sin\alpha = 3$

b- α est maximum lorsque AM est minimum donc lorsque M est confondu avec A' dans ce cas on a
$\vec{AA'}(3;-\frac{3}{2};\frac{3}{2})$ d'ou $AA' = \frac{3}{2}\sqrt{6}$

Donc $\sin\alpha = \frac{\text{HA}}{\text{AA}'} = \frac{3}{\frac{3}{2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

c- (AH) $\perp$ (P) donc (AH) $\perp$ (Δ) et puisque (AA') $\perp$ (Δ) alors (Δ) $\perp$ (A'H) donc α est l'angle du dièdre déterminé par les (P) et (Q).

4) a- Le rayon de (C) est r = $AA' = \frac{3}{2}\sqrt{6}$

b- Le centre de (E) est le point H. Le vecteur $\vec{n}_p(1;-2;2)$ est un vecteur directeur de la droite (AH).
Un system d'équations paramétriques de (AH) est $x = \lambda - 1,\ y = -2\lambda + 1,\ z = 2\lambda$.
H est le point d'intersection de (AH) et (P), d'où $\lambda - 1 + 4\lambda - 2 + 4\lambda - 6 = 0$ ce qui donne λ =1
Par suite H(0; -1; 2)

c- On sait que a = r, b = $r\cos\alpha$ donc $c^2 = a^2 - b^2 = r^2 - r^2\cos^2\alpha = r^2\sin^2\alpha$ d'où c = $r\sin\alpha$ = 3

$$e = \frac{c}{a} = \frac{r\sin\alpha}{5}\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

d- L'axe focal de (E) est la droite passant par le centre de (E) et parallèle à la droite (Δ) donc le vecteur $\vec{v}_\Delta(0;1;1)$ est directeur de l'axe focal, un système d'équations paramétriques de l'axe focal est: x = 0, y = k-1, z = k+2

e- Soit F l'un des deux foyers, F appartient à l'axe focal donc : F(0; k-1; k+2), HF = c =3 d'où HF^2 = 9.

Or $\overrightarrow{HF}(0;k;k)$ d'où k^2 + k^2 = 9 ce qui donne

$k = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $k = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ce qui donne $F(0; \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1; \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2)$

Et $F'(0; -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1; -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2)$

f- L'aire du cercle principal est $S_1 = \pi \times a^2 = \pi \times r^2$ et l'aire de l'ellipse est $S_2 = \pi\, a\, b = \pi \times r \times r\cos\alpha$, l'aire du domaine compris entre (E) et son cercle principal est:

S = S$_1$ – S$_2$ = $\pi \times r^2 - \pi \times r^2\cos\alpha = \pi \times r^2(1 - \cos\alpha)$ or $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ and $r = \frac{3}{2}\sqrt{6}$

D'ou, $S = \frac{27}{2}\pi(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})$ unites d'aire.

Exercise IV

1) a- $k = \frac{A_1A_2}{A_0A_1} = \frac{|z_2 - z_1|}{|z_1 - z_0|} = \frac{|-3+3i|}{|-6|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b- IA$_0$= $|z_0 - z_I| = |5 - 4i - 2 - 2i| = |3 - 6i| = 3\sqrt{5}$, IA$_1$=$|z_1 - z_I| = |-1 - 4i - 2 - 2i| = |-3 - 6i| = 3\sqrt{5}$,

IA$_2$= $|z_2 - z_I| = |-4 - i - 2 - 2i| = |-6 - 3i| = 3\sqrt{5}$

Donc IA$_0$ = IA$_1$= IA$_2$ par suite le point I (2; 2) est le centre du cercle (γ) circonscrit au triangle $A_0A_1A_2$

c- L'image de (γ) par S est un cercle de rayon, R' = $K.R = \frac{\sqrt{2}}{2}.3\sqrt{5} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$

2) a- L'expression complexe d'une similitude est $z' = az + b$; $S(A_0) = A_1$ donne : $z_{A_1} = az_{A_0} + b$ et $S(A_1) = A_2$ donne : $z_{A_2} = az_{A_1} + b$ d'où le système :

$(5-4i)\,a + b = -1 - 4i$

$(-1-4i)\,a + b = -4 - i$ qui admet pour solution $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $b = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ d'ou $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{i-3}{2}$

b- $a = \left(\frac{1-i}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

donc l'angle de S est $-\frac{\pi}{4}$ l'affixe d du centre D de S est $d = \frac{b}{1-a} = -1 + 2i$

3) a- $DM' = \frac{\sqrt{2}}{2}DM$ et $(\vec{DM};\vec{DM'}) = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$. Si on pose $DM = \ell$ alors $DM' = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell$ d'ou

$MM'^2 = DM^2 + DM'^2 - 2DM \times DM'\cos(\frac{\pi}{4})$

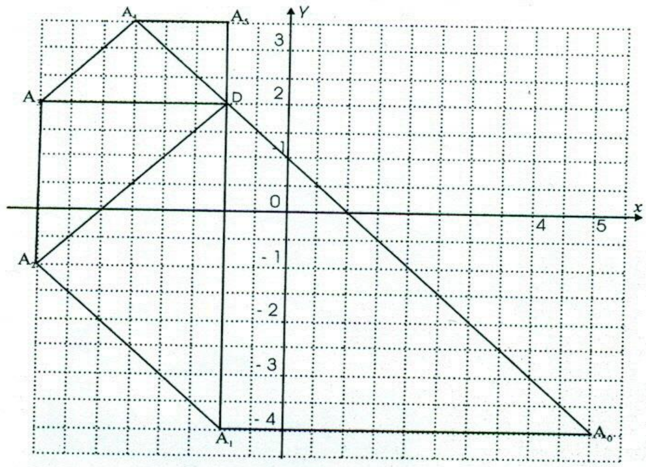
$MM'^2 = \ell^2 + \frac{\ell^2}{2} - 2\ell \times \ell\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ell^2}{2}$ d'où $MM' = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell$ donc le triangle DMM' est isocèle en M' et

puisque $M\hat{D}M' = \frac{\pi}{4}$ alors ce triangle sera rectangle isocèle en M'.

b- $\frac{z'-d}{z'-z} = \frac{DM'}{MM'}e^{i(\vec{MM'};\vec{DM'})} = 1e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$z' - d = i(z' - z)$ et par suite $d - z' = i(z - z')$

4) a-



b- $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{A_{(n+1)}A_{(n+2)}}{A_{(n)}A_{(n+1)}}$ $or\ A_{n+1} = S(A_n) et\ A_{n+2} = S(A_{n+1})\ donc \dfrac{A_{(n+1)}A_{(n+2)}}{A_{(n)}A_{(n+1)}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et par suite

$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (U_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Et de premier terme $U_0 = A_0A_1 = 6$

5) a- $(\vec{DP_k};\vec{DP_{k+1}}) = (\vec{DA_{m+4k}} + \vec{DA_{m+4k+4}})$ = $(\overrightarrow{DA_{m+4k}} + \overrightarrow{DA_{m+4k+1}}) + \overrightarrow{DA_{m+4k+1}}; \overrightarrow{DA_{m+4k+2}}) + (\overrightarrow{DA_{m+4k+2}}; \overrightarrow{DA_{m+4k+3}})$
$+ (\overrightarrow{DA_{m+4k+3}}; \overrightarrow{DA_{m+4k+4}}) = -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = -\pi(2\pi)$

Donc les points D, P_k et P_{k+1} sont alignes; et par suite tous les points P_k se trouvent sur une droite passant par D.

b- $\dfrac{DP_{(k+1)}}{DP_{(k)}} = \dfrac{DA_{(m+4k+4)}}{DA_{(m+4k)}} = \dfrac{DA_{(m+4k+4)}}{DA_{(m+4k+3)}} \cdot \dfrac{DA_{(m+4k+3)}}{DA_{(m+4k+2)}} \cdot \dfrac{DA_{(m+4k+2)}}{DA_{(m+4k+1)}} \cdot \dfrac{DA_{(m+4k+1)}}{DA_{(m+4k)}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow (\overrightarrow{DP_k}; \overrightarrow{DP_{k+1}}) = -\pi(2\pi)\ alors \overrightarrow{DP_{k+1}} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{DP_k}$

Par suite $P_{k+1} = H(P_k)$ ou H est l'homothétie de centre D et de rapport -1/4

Exercice V

A-1) $z = \frac{1}{y} \Rightarrow$ y = 1/z d'ou

$y' = \frac{z'}{z^2}$ et $y' + 2y^2e^x - y = 0$

devient $-\frac{z'}{z^2} + 2\frac{1}{z^2}e^x - \frac{1}{z} = 0$ soit $-z' + 2e^x - z = 0$ par suite $(\beta); z' + z = 2e^x$

2) La solution générale de l'équation $z' + z = 0$ est $z_1 = C\, e^{-x}$

$z_2 = e^x$ est une solution particulière de l'équation (β) donc

$z = z_1 = z_2 = Ce^{-x} + e^x$ est une solution générale de (β)

$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{Ce^{-x} + e^x}$ est une solution générale de (α)

3) $y(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ est une solution particulière de (α)

B- 1) Le domaine de f est centré en O , et $f(-x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} = f(x) \Rightarrow f$ est une fonction paire

2) $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$, $f'(x) \geq 0$ pour $x \leq 0$, d'où le tableau de variations de f :

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	1/2	$\searrow$

3) a- $g'(x) = f'(x)$ -, puisque pour $x > 0$, $f'(x) < 0$ alors

$x > 0$ $g'(x) < 0$ d'où le tableau de variations de g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	1/2 $\searrow$	$-\infty$

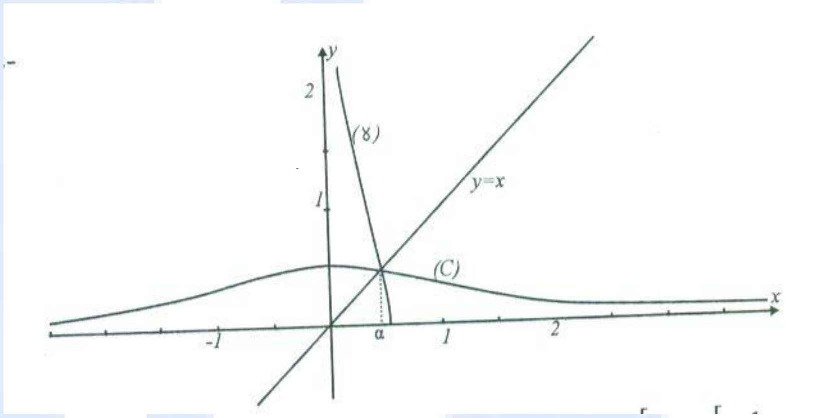
$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 0 - \infty = -\infty$

b- g est continue et strictement décroissante sur [0 ; +∞[, elle décroit de $\frac{1}{2}$ à -∞ donc sa courbe représentative coupe l'axe $x'x$ en un seul point par suite l'équation g(x) = 0 admet une seule racine α , donc l'équation *f(x)* = *x* admet sur [0 ; +∞[une seule solution α .

$g(0,4) = f(0,4) - 0,4 = 0,0625 > 0$

$g(0,6) = f(0,6) - 0,6 = -0,056 < 0$ donc $0,4 < \alpha < 0,5$

c-



4) a- f est continue et strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$ donc elle admet une fonction réciproque f^{-1}

b- Le domaine de définition de f^{-1} est $\left]0; \frac{1}{2}\right]$

$y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow y = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ d'ou $ye^{2x} + y - e^x = 0$

équation du seconde degré en e^x, Δ=1-4y^2 ; $e^x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}$; ce qui donne

$x = \ln(\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y})$ *pour* $y = \dfrac{1}{4}$; on a $x = \ln\left[\dfrac{1+\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}}\right] = \ln(2+\sqrt{3}) > 0$ ou $x = \ln\left[\dfrac{1-\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}}\right] = \ln(2-\sqrt{3}) < 0$

donc la solution acceptable est $x = \ln\left[\dfrac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}\right] \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln\left[\dfrac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}\right]$

c- La courbe (γ) de f^{-1} est symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation y = x , (C) et (γ)

se coupent au point E(α , α)

C- 1) a- $f(x)-e^{-x} = \frac{1}{e^x+e^{-x}} - e^{-x} = \frac{1-1-e^{-2x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{-e^{-2x}}{e^x+e^{-x}} < 0$ donc $f(x) < e^{-x}$

Pour tout x et en particulier pour $x \geq 0$

b- $f(x) < e^{-x}$ donc $\int_0^n f(x)dx < \int_0^b e^{-x}dx$ so $\int_0^n f(x)dx < \left[-e^{-x}\right]_0^n$

$\int_0^n f(x)dx < 1-e^{-n} \Rightarrow V_n \leq 1-e^{-n}$

2) a- $V_{n+1} - V_n = \int_0^{n+1} f(x)dx - \int_0^n f(x)dx = \int_n^0 f(x)dx + \int_0^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} f(x)dx$

b – Puisque $f(x) > 0$ alors $\int_n^{n+1} f(x)dx > 0$ donc $v_{n+1} - v_n > 0$ soit $v_{n+1} > v_n$ par suite la suite

(v_n) est strictement croissante.

c – La suite (v_n) est croissante et majorée par 1 car $V_n \leq 1-e^{-n} < 1$ donc elle est convergente vers une limite ℓ.
Puisque $0 \leq v_n < 1$ alors $0 \leq \ell \leq 1$

3) $f(x) = \frac{1}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x\left(e^x+e^{-x}\right)} = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$

$$v_n = \int_0^n \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \left[\arctan e^x\right]_0^n = \arctan e^n - \arctan 1 = \arctan e^n - \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \arctan e^n - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \text{car } \lim_{n\to\infty} \arctan e^n = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

L'aire du domaine demandé est egale à l'aire du domaine limité par (C) $x'x, y'y$ et la droite d'equation $x = 2$

4) à cause de la symétrie par rapport à la droite d'equation $y = x$

$$\int_0^2 f(x)dx = v_2 = \arctan e^2 - \frac{\pi}{4} \text{ unité d'aire} = 16 \times (\arctan e^2 - \frac{\pi}{4}) cm^2$$