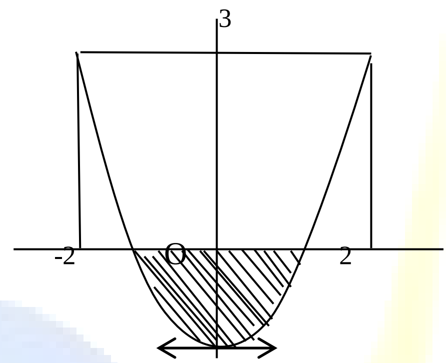
LEBANESE UNIVERSITY
FACULTY OF ENGINEERING

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2005-2006 **Mathématiques** **Durée : 3 heures**

La distribution des notes est sur 25

I-(2.5pts) On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx$ ou n est un entier naturel.



1-Démontrer que, pour tout n, $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$

2-Calculer I_0 et I_1

3-a) Démontrer que, pour tout n, $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$

b) En déduire que, $\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$

4-La figure ci-contre montre la courbe représentative de la fonction f définie sur [-2; 2]

Par $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2+1}$ Calculer l'aire du domaine hachuré <u>en utilisant les résultats précédents</u>.

II- (4 pts) A- Soit $(\mathrm{U_n})$ la suite définie pour $n \ge 2$ par $\mathrm{U_n} = 2^{n-1} - (n+1)$

1-a) Calculer les 3 premiers termes de la suite $(\mathrm{U_n})$

b) Démontrer que $(\mathrm{U_n})$ est strictement croissante

2- Sachant que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^x}{x} = +\infty$, démontrer que la suite $(\mathrm{U_n})$ est divergente

B- On considère une urne contenant 10 boules blanches et 10 boules noires. On tire au hasard une boule de cette urne et on la remet dans l'urne (tirage avec remise). On effectue cette opération n fois ($n \ge 2$).

On considère les évènements **C, D, E, F** et **G** définies par :

C : « les boules tirées sont noires »

D : « les boules tirées sont de la même couleur »

E : « les boules tirées ne sont pas de la même couleur »

F : « parmi les boules tirées, une seule est blanche »

G : « parmi les boules tirées au plus une boule est blanche »

1- Calculer la probabilité de chacun des évènements C et D

2-a) Montrer que $p(E) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$, $p(F) = \frac{n}{2^n}$ et $p(G) = \frac{n+1}{2^n}$

b- Montrer que **E** $\cap$ **G** = **F**. En déduire que **E** et **G** sont indépendants si et seulement si $2^{n-1} = n+1$

3-En utilisant la question A-1, montrer que les évènements **E** et **G** sont indépendants pour une seule valeur de n que l'on déterminera.

III- (6 pts) Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$

On considère l'ellipse (E) de foyer O, de directrice la droite (d) d'équation $x=\frac{5}{2}$ et d'excentricité $\frac{2}{3}$

1-a) Ecrire une équation de (E) et déterminer son centre

b) Démontrer que le point F (-4; 0) est le second foyer de (E) et que la droite (δ) d'équation $x=-\frac{13}{2}$ est la directrice associée.

c) Déterminer les points d'intersection P et Q de (E) avec l'axe y′O y. Tracer (E)

2-Soit M un point de (E) d'affixe $z=re^{i\theta}, 0<\theta<\pi$,

a) Calculer la distance de M a la directrice (d) en fonction de r et θ

b) En déduire que $OM=\dfrac{5}{3+2\cos\theta}$

3-a) La droite (OM) recoupe (E) en M´. Montre que $OM'=\dfrac{5}{3-2\cos\theta}$

b) Déterminer θ pour que la longueur MM´ soit minimum.

4- Soit N_1 (x_1 ; y_1) un point quelconque de (E) tel que $y_1 \neq 0$.

a) Déterminer une équation de la tangente (T_1) a (E) en N_1 et montrer que (T_1) coupe la directrice (δ) au point d'ordonné $\dfrac{5(x_1+4)}{2y_1}$

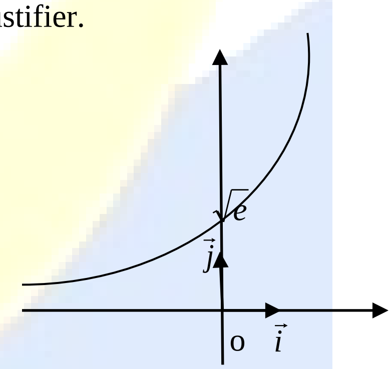
b) Soit N_1 (x_2; y_2) le point de (E) tel que N_1, N_2 et F soient alignes.
Montrer que $x_1y_2-x_2y_1=4(y_1-y_2)$. En déduire que les tangentes a (E) en N_1 et N_2 se coupent sur (δ)

b) Quand θ varie, sur quelle droite se coupent les tangentes a (E) en M et M′ ? Justifier.

IV- (6.5 pts) **A-** On considère l'équation différentielle (E) : $2y' - y = 0$

1- Résoudre l'équation (E)

2- La figure ci-contre montre la courbe représentative d'une fonction g solution particulière de (E).



a) Déterminer la fonction g.

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on déterminera le domaine de définition.

c) Tracer la courbe representative (γ) de g^{-1} et montrer que $g^{-1}(x)=2\ln x-1$

B- On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = |\ln x| + \left|\ln \dfrac{x}{e}\right|$

et l'on désigne par (C) sa courbe representative dans un repère orthonormée $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$

1-a) Montrer que $f(x) = \begin{cases} 1-2\ln x & \text{si } x \in\ ]0;1[\\ 1 & \text{si } x \in [1\,;e] \\ 2\ln x - 1 & \text{si } x \in\ ]e\,;+\infty[\end{cases}$

b) Montrer que f est continue en 1 et en e

2-a) Calculer $f(\frac{1}{2})$ et $f(e^2)$

b) En utilisant la courbe (γ) tracée dans la partie A, construire la courbe (C).

3- Soit a et b deux nombres strictement positifs tels que $ab=e$. Montrer que $f(a) = f(b)$

4-a) Montrer que, pour tout $\lambda > 1$. L'équation $f(x) = \lambda$ admet deux racines x_1 et x_2 telles que $x_1x_2 = e$

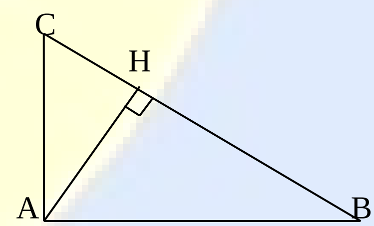
b) Déterminer les solutions de chacune des deux équations $f(x) = 1 + \ln 4$ et $f(x) = 3$

5-Soit (P) la courbe d'équation $y = e^{f(x)}$ ou $x \geq e$. Montrer que (P) est une partie d'une parabole dont on déterminera le foyer et la directrice.

V-(6 pts) Dans un plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$; et on désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BC)

1-Soit h l'homothétie de centre H qui transforme C en B
Déterminer et tracer h (AC). En déduire l'image D de A par h.

2-Soit S la similitude qui transforme A en B et C en A
a)Déterminer l'angle de S.
b) Déterminer l'image par S de chacune des deux droites (AH) et (CH)
c) En déduire que H est le centre de S.



3-a) Déterminer l'image par S de chacune des deux droites (AB) et (CB)
b) Montrer que S(B) =D et en déduire que S∘S(A) = h(A)
c) Montrer que S∘S =h

4-Soit E le milieu de [AC]
a) Déterminer les points F = S (E) et G = S(F)
b) Montrer que les points E, H, et G sont alignés et que le triangle EFG est rectangle.

5-Dans cette partie, on suppose AB=6 et AC=4, et on suppose le plan rapporté a un repère orthonormé direct $(A\,,\vec{u}\,,\vec{v})$ tel que $\vec{u} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

a)Déterminer le forme complexe de S. En déduire le rapport de S et celui de *h*
b) Déduire les coordonnées de H et celles de D.

Concours d'entrée 2005-2006 **Solution de Mathématiques** **Durée : 3 heures**

La distribution des notes est sur 25

1) $\frac{x^n}{1+x^2} \geq 0$ pour $0 \leq x \leq 1$ donc $I_n \geq 0$

$\frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$ donc $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 x^n dx$ d'ou $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ et par suite

$I_n \leq \frac{1}{1+n}$, donc $0 \leq I_n \leq \frac{1}{1+n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$

2) $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

3) a- $I_{n+2} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n+2}+x^n}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}[x^{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

b- $\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx = I_4$ or $I_0 + I_2 = I \Rightarrow I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$

$I_2 + I_4 = \frac{1}{3} \Rightarrow I_4 = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$

4) $f(x) = 0$; *donne* $x = -1$ *or* $x = 1$

f est une fonction paire, donc l'aire hachurée est donnée par:

A=-2$\int_0^1 f(x)dx = 2(I_0 - I_4) = \frac{4}{3}$ unités d'aire

II- A)

1-a) $U_2 = 2^{2-1}$ - (2+1)= -1 ; $U_3 = 2^{3-1}$ – (3+1)=0 ; U_4 = 2^{4-1} – (4+1) =3

b) $U_{n+1} - U_n = 2^n - (n+2) - 2^{n-1} + (n+1) = 2^{n-1} - 1 > 0$ car $n \geq 2$

donc la suite (U_n) est strictement croissante.

2- $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\times 2^n - n - 1) = \lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{2}\times\frac{2^n}{n} - 1 - \frac{1}{n}) = (+\infty)\times(+\infty) = +\infty$

Donc la suite (U_n) est divergente.

B) 1-La probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

p(C)=*p(N)* x *p(N)* x…x *p(N), n* fois

d'où : p (C)= $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times.........\frac{1}{2}, n\ fois$ donc, P(C)= $(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^n}$

p(D) = *p* (*n* boules noires ou *n* boules blanches)

= *p* (*n* boules noires) +p (*n* boules blanches)

Or p (*n* boules blanches)= $\frac{1}{2^n}$ d*onc p(D)* $= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$

2-a) *P* (E) =1-P (D) =1- $\frac{1}{2^{n-1}}$

P (F) $= n\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^{n-1} = n.\frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^n}$

P (G) = P (F $\cup$ C) =*P (F) +P(C)*

C et F sont incompatibles donc $P(G) = \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}$

b) E est l'évènement

Obtenir (1B et *n*-1 N) ou (2B et *n*-2 N) ou (*n*-1 B et 1 N)

G est l'évènement

Obtenir (0 B et *n*N) ou (1B et *n*-1 N)

Donc $E\cap G$ est l'évènement

Obtenir (1B et *n*-1 N) par suite $E\cap G$ = F

E et G sont indépendants si et seulement si

p($E\cap G$)= *p*(E) x *p*(G), *p*(E) x *p*(G) = *p*(F) ce qui donne

$\frac{n}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).\frac{n+1}{2^n}$. Soit *n* = *n* +1 - $\frac{n+1}{2^{n-1}}$ or $\frac{n+1}{2^{n-1}} = 1$

Et par suite $2^{n-1} = n+1$

3- E et G sont indépendants donc $2^{n-1} = n+1$, d'où U_n =0

Mais (U_n) est strictement croissante et U_3= 0 donc il existe une seule valeur de *n* qui est 3.

III)

1) a- Soit M(x, y) un point variable de (E) de projeté orthogonal

$M'(\frac{5}{2};y)$ sur(d), $\frac{MO}{MM'} = e = \frac{2}{3}$ donne

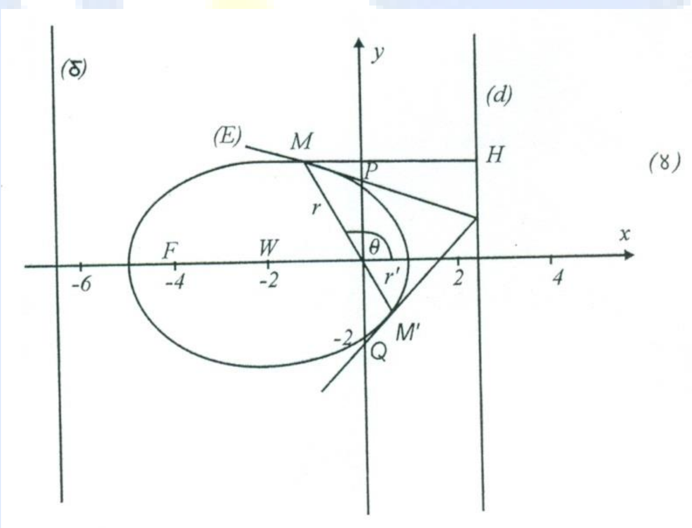
$9(x^2+y^2) = 4(x-\frac{5}{2})^2$, soit $5x^2+9y^2+20x-25=0$ équation équivalente a $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

Le centre de (E) est le point w (-2;0)

b- Le point F est le symétrique de O par rapport à w donc c'est le point F (-4, 0), la directrice associée à F est le symétrique de (d) par rapport à w, donc c'est la droite (δ) d'équation $x = \frac{-13}{2}$

c- Pour x = 0 on a $\frac{4}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ ce qui donne $\frac{y^2}{5}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ d'où

$y^2=\frac{25}{9}$ et par suite $y=\frac{5}{3}$ *or* $y=-\frac{5}{3}$ *donc* $P(0,\frac{5}{3})$ *et* $Q(0, -\frac{5}{3})$ ou inversement .



2) a- $d(\text{M};(d))=MH = \left|x_M - \frac{5}{2}\right| = \left|r\cos\theta - \frac{5}{2}\right|$

b- On a $OM = r$ et $x_M < \frac{5}{2}$ donc $r\cos\theta - \frac{5}{2} < 0$ d'où $d\,(\text{M};(d)) = \frac{5}{2} - r\cos\theta$

Or $\frac{OM}{MH} = e = \frac{2}{3}\, d'ou\ \ r = \frac{2}{3}(\frac{5}{2} - r\cos\theta)$

Ce qui donne r = OM = $\frac{5}{3+2\cos\theta}$

3) a- $z_{M'} = z' = r'e^{i\theta'} avec \theta' = (\vec{u};\overrightarrow{OM}) = \pi + \theta (2\pi)$

$\Rightarrow OM' = r' = \frac{5}{3+2\cos\theta'} = \frac{5}{3+2\cos(\pi+\theta)} = \frac{5}{3-2\cos\theta}$

b- On a $MM'=MO+OM' = = \frac{30}{9-4\cos^2\theta}$

Pour que MM′ soit minimum il faut que $9-4\cos^2\theta$ soit maximum
et comme $9-4\cos^2\theta \le 9$ alors MM' soit minimum lorsque

$9-4\cos^2\theta = 9 \Rightarrow \cos^2\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$ puisque $0<\theta<\pi$ alors $\theta = \frac{\pi}{2}$

4) a - $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow \frac{2}{9}(x+2) + \frac{2yy'}{5} = 0$ au point $N_1(x_1\,;\,y_1)$,

$\Rightarrow y'_{N_1} = \frac{-5}{9}.\frac{x_1+2}{y_1}$ une équation de la tangent (T_1) est $y - y_1 = \frac{-5(x_1+2)}{9y_1}(x-x_1)$

T_1) coupe la directrice (δ) au point d'abscisse $x = -\frac{13}{2}$ ce qui $y - y_1 = \frac{-5(x_1+2)}{9y_1}(-\frac{13}{2} - x_1)$

$$\Rightarrow y = \frac{65(x_1+2)}{18y_1} + \frac{5x_1(x_1+2)}{9y_1} + y_1 = \frac{10x_1^2 + 18y_1^2 + 85x_1 + 130}{18y_1}$$

Or $5x_1^2 + 9y_1^2 + 20x_1 - 25 = 0 \Rightarrow 5x_1^2 + 9y_1^2 = -20x_1 + 25$ donc $10x_1^2 + 18y_1^2 = -40x_1 + 50$,

$$\Rightarrow y = \frac{45x_1 + 180}{18y_1} = \frac{5(x_1+4)}{2y_1}$$

b- On a F (-4; 0) d'ou

$\overrightarrow{FN_1}(x_1+4; y_1)$ et $\overrightarrow{FN_2}(x_2+4; y_2)$

N_1 , N_2 et F alignés donc $\overrightarrow{FN_1}$ et $\overrightarrow{FN_2}$ sont colinéaire d'où :

$y_2(x_1+4) = y_1(x_2+4)$

$x_1y_2 - y_1x_2 = 4(y_1 - y_2)$

Soit (T_2) la tangente en N_2 à (E), (T_2) coupe (δ) au point J tel que $y_J = \dfrac{5(x_2+4)}{2y_2}$

$x_1y_2 - y_1x_2 = 4(y_1 - y_2)$ on aura $\dfrac{x_2+4}{y_2} = \dfrac{x_1+4}{y_1}$

$\dfrac{5}{2}\times\dfrac{(x_2+4)}{y_2} = \dfrac{5}{2}\times\dfrac{(x_1+4)}{y_1}$ $donc\ y_J = y_1$ et puisque I et J ont meme abscisse alors

I et J sont confondus et par suite (T_1) et (T_2) se coupe sur (δ)

c- (N_1 N_2) est une focal passant par F et (T_1) et (T_2) se coupent sur (δ) en *I*, par symétrie la sécante focal (MM′) passé par le foyer O et les tangentes à (E) en M et M′ se coupent sur la directrice (d).

IV- A-1) $2y' - y = 0$ est équivalente à $y' - \dfrac{1}{2}y = 0$ la solution general de (E) est $y = Ce^{\frac{x}{2}}$

2) a- La courbe représentative de g passe par le point $(0; \sqrt{e})$ d'où $\sqrt{e} = Ce^0$ $donc\ C = \sqrt{e}$

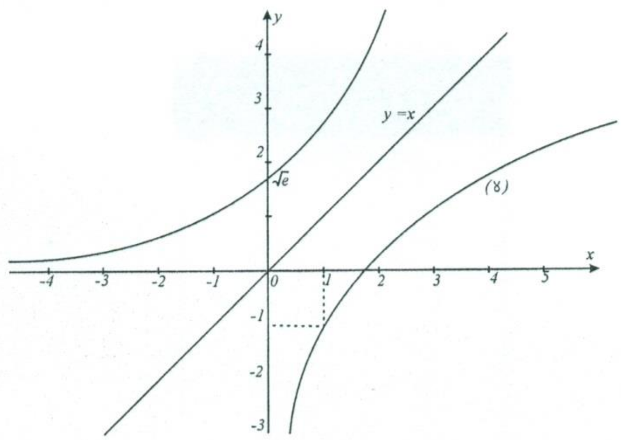
par suite $g(x) = \sqrt{e}\ e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x+1}{2}}$

b- g est continue et strictement croissante sur IR donc elle admet une fonction réciproque g^{-1}

$D_{g^{-1}} = \left]0; +\infty\right[$

c- La courbe (γ) of g^{-1} est symétrique de celle de g par rapport à la droite d'équation $y = x$

$y = e^{\frac{x+1}{2}}$ donne $x + 1 = 2 \ln y$ soit $x + 1 = 2 \ln y$ d'où $g^{-1}(x) = 2 \ln x - 1$



B) a- * Si $0 < x < 1$ alors $0 < \frac{x}{e} < \frac{1}{e} < 1$ donc $\ln x < 0$ et $\ln\frac{x}{e} < 0$

par suite $f(x) = |\ln x| + \left|\ln\frac{x}{e}\right| = -\ln x - \ln\frac{x}{e}$

$= -\ln x - \ln x + \ln e = 1 - 2\ln x$

* Si $1 \le x < e$ alors $\frac{1}{e} \le \frac{x}{e} \le 1$

$\ln x \ge 0$ et $\ln\frac{x}{e} \le 0$ par suite $f(x) = |\ln x| + \left|\ln\frac{x}{e}\right| = \ln x - \ln\frac{x}{e} = \ln x - \ln x + \ln e = 1$

* Si $x > e$ alors $\frac{x}{\mathrm{e}} > 1$ donc $\ln x > 0$ et $\ln\frac{x}{\mathrm{e}} > 0$ par suite

$f(x) = |\ln x| + \left|\ln\frac{x}{e}\right| = \ln x + \ln\frac{x}{e} = \ln x + \ln x - \ln e = 2\ln x - 1$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2\ln x & \text{si } x \in \,]0; 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1; e] \\ 2\ln x - 1 & \text{si } x \in \,]e; +\infty[\end{cases}$$

b- On a $f(1) = 1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-2\ln x) = 1 - 2.0 = 1 = f(1)$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(1) = f(1)$ *donc f est continue en* 1

- De même $f(e) = 1$ et

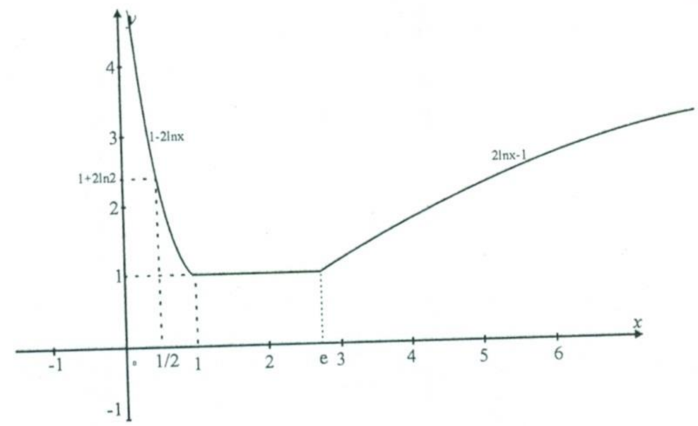
$\lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^-} (1) = 1 = f(e)$ *donc f est continue en* e

$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} (2\ln x - 1) = 1 = f(e)$

2) a- $f(\frac{1}{2}) = 1-2\ln \frac{1}{2} = 1+2\ln 2$

$f(e^2) = 2\ln e^2 - 1 = 4-1 = 3$

b-



3) $f(a) = |\ln a| + \left|\ln \frac{a}{e}\right| = |\ln a| + \left|\ln \frac{1}{b}\right| = |\ln a| + |\ln b|$

$f(b) = |\ln b| + \left|\ln \frac{b}{e}\right| = |\ln b| + \left|\ln \frac{1}{a}\right| = |\ln b| + |\ln a|$ donc $f(a) = f(b)$

4) a- Graphiquement la droite d'équation $y = \lambda$ coupe (C) en deux points d'abscisses x_1 et x_2 tel que $x_1 \in]0,1[$ et $x_2 \in]e;+\infty[$ d'où : $1 - 2\ln x_1 = 2\ln x_2 - 1$

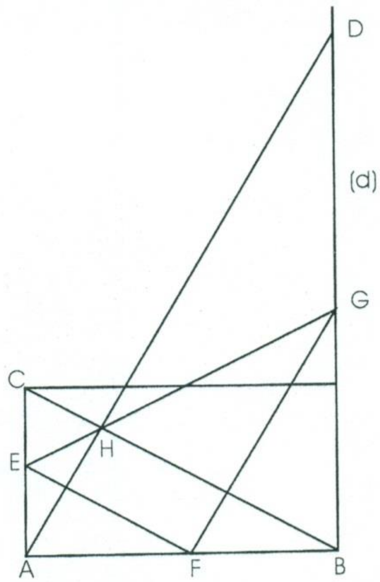
Ce qui donne
$\ln x_1 + \ln x_2 = 1$ soit $\ln x_1 x_2 = 1$ et par suite $x_1 x_2 = e$
Donc l'équation $f(x) = \lambda$ admet deux racines x_1 et x_2 telles que $x_1 x_2 = e$

b- $f(x) = 1+\ln 4$ donne $x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2e$

$f(x) = 3$ give $x = e^2$ or $x = \frac{1}{e}$

5) $y = e^{f(x)}$ donne $f(x) = \ln y$ et puisque $f(x) = 2\ln x - 1$ car $x \geq e$ d'où: $2\ln x - 1 = \ln y$, soit $\ln x^2 - \ln e = \ln y$ ou $\ln \frac{x^2}{e} = \ln y$ et par suite $x^2 = ey$ donc (P) est une partie d'une parabole d'axe focal yy' de sommet O, de foyer F(0; $\frac{e}{4}$) et de directrice la droite d'équation y = - $\frac{e}{4}$

V) 1) h (C) = B donc l'image de (AC) est la droite passant par B et parallèle à (AC) qui est la droite (d)
D = h(A) donc D, H et A sont alignés donc D $\in (AH)$
$A \in (AC)$ donc h (A) $\in (d)$, par suite D est l'intersection des deux droites (d) et (AH)



2) a- S(A) = B et S(C) = A donc l'angle de S est $(\vec{AC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$

b- L'image par S de (AH) est la droite passant par B et perpendiculaire à (AH), donc c'est la droite (BC).
L'image par S de (CH) est la droite passant par A et perpendiculaire à (CH), donc c'est la droite (AH).

c- H est l'intersection des deux droites (AH) et (CH) donc son image par S est le point d'intersection des deux droites (BC) et(AH) donc c'est le point H par suite S(H) = H, donc H est le centre de S.

3) a- L'image par S de (AB) est la droite passant par B et perpendiculaire à (AB), donc c'est la droite (BD).
L'image par S de (CB) est la droite passant par A et perpendiculaire à (CB), donc c'est la droite (AD).

b- B est l'intersection des deux droites (AB) et (CB) donc son image par S est le point d'intersection des deux droites (BD) et (AD) donc c'est le point D, par suite S(B) = D,

$S \circ S(A) = S(S(A)) = S(B) = D = h(A)$

c- $S \circ S = S(H; k; \frac{\pi}{2}) \circ S(H; k; \frac{\pi}{2}) = S(H; k^2; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = S(H; k^2; \pi) = h(H; -k^2)$

$S \circ S$ et h ont le meme centre et $S \circ S(A) = h(A)$ donc $S \circ S = h$

4) a- E est le milieu de [AC] , et puisque la similitude conserve les milieu donc S(E) est le milieu du segment [BA] image de [AC] par S, donc F est le milieu de [BA].
F est le milieu de [BA] donc S(F) est le milieu du segment [BD] image de [BA] par S, par suite G est le milieu de [BD].

b- $E \xrightarrow{s} F \xrightarrow{s} G$, donc $E \xrightarrow{h} G$

$\overrightarrow{HG} = -k^2 \overrightarrow{HE}$ donc les points E, H et G sont alignés.
S(EF) = (FG), donc les deux droites (EF) et(FG) sont perpendiculaires et par suite le triangle EFG est rectangle en F.

5) a- On a $z_B = 6$: $z_C = 4i$
La forme complexe de S est $z' = az + b$
S(A) = B donne $z_B = az_A + b$ d'ou $b = 6$
S(C) = A donne $z_A = az_C + b$ d'ou $a = \frac{3}{2}i$ par suite $z' = \frac{3}{2}iz + 6$
Le rapport de S est $k = |a| = \frac{3}{2}$ et le rapport de h est $k' = -k^2 = \frac{-9}{4}$, h est une homothétie negative.

b- $z_H = \frac{b}{1-a} = \frac{6}{1-\frac{3}{2}i} = \frac{12}{13}(2+3i)$ donc $H(\frac{24}{13}, \frac{36}{13})$

S(B) = D d'ou $z_D = \frac{3}{2}iz_B + 6 = \frac{3}{2}i \times 6 + 6 = 6 + 9i$ donc D (6; 9)