

SUJET A

(Programme Libanais)

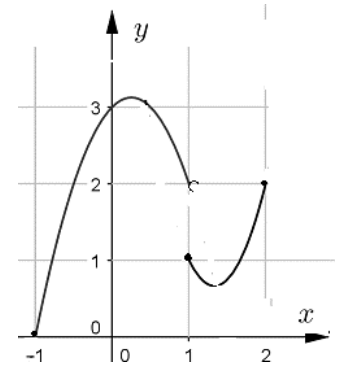
*Les smartphones, les documents et calculatrices graphiques sont strictement interdits.
 Seules les calculatrices non graphiques sont autorisées.*

Exercice 1 : (12 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Répondre sur la feuille de réponses, en entourant pour chacune des questions **une seule** des réponses a, b, c ou d.

Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie sur $[-1 ; 2]$ dont la courbe est donnée ci-contre.



- a) Pour tout réel k , l'équation $f(x) = k$ admet exactement 2 solutions.
- b) Pour tout réel $k > 3$, l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.
- c) L'équation $f(x) = x$ admet exactement 2 solutions.
- d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

2. On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 0,9U_n + 20$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 200$ est :

- a) arithmétique. b) géométrique. c) décroissante. d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

3. Le nombre complexe $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i\sqrt{3})\right)^{18}$ est égal à :

- a) -512 b) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ c) 512 d) Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

4. Considérons la suite (U_n) définie par $U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. La suite (S_n) définie par $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ est :

- a) décroissante. b) convergente c) divergente d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x+1}} & \text{si } x > -1 \\ \sqrt{|ax+1|} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$ où a est une constante réelle

- a) La fonction f est continue si $a = -1$ b) La fonction f est continue si $a = 1$
- c) La fonction f est continue si $a = 0$ d) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f n'est jamais continue.

6. Considérons la fonction définie par $f(x) = 5 \ln(xe^x)$.

- a) La fonction f est convexe. b) La fonction f est concave.
- c) f n'est ni convexe, ni concave. d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

7. L'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ tels que $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur est :

- a) La droite (Ox) privée du point $(1, 0)$. b) La droite (Oy) privée du point $(0, 1)$.
- c) Le cercle de centre O est de rayon 1. d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

8. Un questionnaire à choix multiple (QCM) est constitué de huit questions. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard à toutes les questions.
- Le nombre de réponses possibles à ce QCM est 4096.
 - Le nombre de réponses possibles à ce QCM est 65536.
 - La probabilité que le candidat réponde correctement à 6 questions exactement est $\frac{3}{4}$.
 - Aucune des affirmations précédentes est correcte.

9. Considérons l'équation $\ln(x) + \ln(x - 1) = \ln(x + 1)$, d'inconnue réelle x .

L'ensemble S des solutions de cette équation est :

- $S = \{ 2 \}$
 - $S = \{ -1 + \sqrt{2} ; -1 - \sqrt{2} \}$
 - $S = \{ 1 + \sqrt{2} ; 1 - \sqrt{2} \}$
 - Aucune des réponses précédentes n'est correcte.
10. Un récipient contenant initialement 1 litre d'eau est laissé au soleil. Toutes les heures, le volume d'eau diminue de 15 %. Le volume d'eau devient inférieur à un quart de litre au bout de :
- 8 heures.
 - 3 heures.
 - 2 heures
 - Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

11. La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

- $f(x) = e^{-3x}$
- $f(x) = -\frac{4}{3}e^{-3x} + \frac{7}{3}$
- $f(x) = e^{-3x} + \frac{7}{3}$
- Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

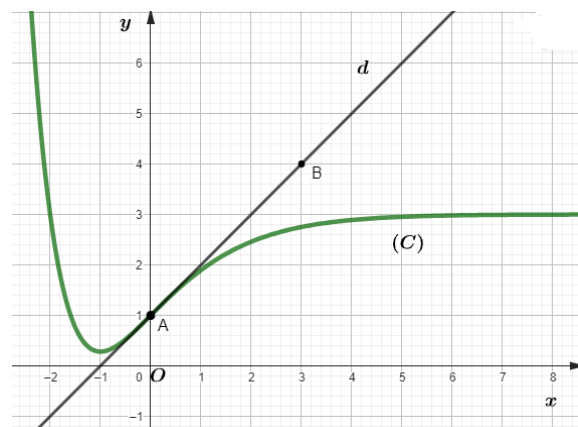
12. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 3$ où a et b sont deux constantes réelles.

La représentation graphique (C) de f est donnée ci-dessous.

Le point $A(0 ; 1)$ est un point de la courbe (C) . La tangente d à la courbe (C) en A passe par le point $B(3 ; 4)$.

Alors :

- $a = 1$ et $b = -2$.
- $a = -1$ et $b = -2$.
- $a = 1$ et $b = 2$.
- Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.



13. La limite, quand n tend vers $+\infty$, de la suite numérique (U_n) définie par $U_n = \frac{1+2^n}{3+3^n}$ vaut :

- 1
- $\frac{2}{3}$
- $+\infty$
- Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

14. On considère une fonction h , définie et continue sur \mathbb{R} , dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

On note H la primitive de h , définie sur \mathbb{R} , qui s'annule en 0.

Elle vérifie la propriété :

- H est positive sur $] -\infty ; 0]$
- H est croissante sur $] -\infty ; 1]$
- H est négative sur $] -\infty ; 1]$
- H est croissante sur \mathbb{R}

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de h			

15. Une maladie touche 20% de la population d'un pays. Lors d'un dépistage de cette maladie, on utilise un test biologique qui a les caractéristiques suivantes :

- lorsqu'une personne est malade, la probabilité d'avoir un test positif est de 85%.
- lorsqu'une personne n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est de 95%.

On choisit une personne au hasard dans cette population. La probabilité que cette personne soit testée positive est égale à :

- 85%
- 90%
- 21%
- Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

16. L'ensemble des solutions de l'inéquation suivante $\sin(x) < \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ est :
- a) $[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$ b) $[0; \frac{\pi}{6}]$ c) $[0; \frac{\pi}{6}] \cup [\pi; 2\pi]$ d) Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. On dispose d'un dé cubique non truqué numéroté de 1 à 6, et d'une urne contenant 2 boules blanches et 3 boules noires, indiscernables au toucher. On lance le dé. Si on obtient un nombre multiple de 3 alors on tire au hasard 2 boules de l'urne, successivement avec remise. Sinon on tire au hasard simultanément 2 boules de l'urne.

Considérons les événements suivants :

M : « Le lancer du dé donne un nombre multiple de 3 » , B : « Les 2 boules tirées sont blanches ».

Alors :

- a) $p(B) = \frac{13}{100}$ b) $p(B) = \frac{13}{50}$ c) $p(B) = \frac{3}{25}$ d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.
18. On considère l'équation différentielle (E) suivante : $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$.
Soit f l'unique solution de (E) telle que $f(0) = 1$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation :
- a) $x = 3y + 1$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = 1$ d) Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

19. Soit $z = 1 + e^{\frac{i\pi}{5}}$.

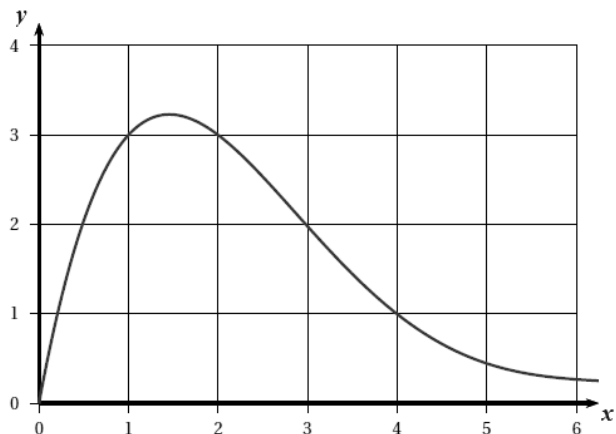
Le module de z est égal à :

- a) $2\cos(\frac{\pi}{5})$ b) $\sqrt{1 + (\cos(\frac{\pi}{5}))^2}$ c) $2\cos(\frac{\pi}{10})$ d) Aucune des réponses précédentes.

20. La courbe représentative d'une fonction f est donnée ci-contre.

Un encadrement de l'intégrale $\int_1^5 f(x)dx$ est donné par :

- a) $0 \leq I \leq 4$ b) $1 \leq I \leq 5$
c) $5 \leq I \leq 10$ d) $10 \leq I \leq 15$



21. On considère dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation (E) suivante : $z^2 - 3(\sqrt{3} + i)z + 4(1 + i\sqrt{3}) = 0$ d'inconnue z . Soit S l'ensemble des solutions de (E) dans \mathbb{C} .

- a) $(\sqrt{3} + i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$ b) $S = \{ 2(\sqrt{3} + i); \sqrt{3} + i \}$
c) $S = \{ 2(\sqrt{3} - i); \sqrt{3} - i \}$ d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

22. Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses. On choisit au hasard n pièces produites par la chaîne de fabrication. Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

Quel est le plus petit entier naturel n tel que la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à 95%?

- a) 50 b) 73 c) 74 d) Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

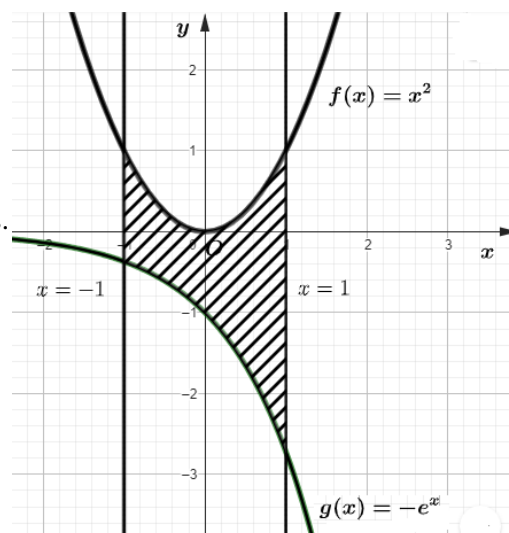
23. L'aire de la surface hachurée représentée sur le graphique ci-contre vaut :

a) $\frac{2}{3} - e + e^{-1}$ u.a.

b) $\frac{2}{3} + e - e^{-1}$ u.a.

c) $-\frac{2}{3} + e - e^{-1}$ u.a.

d) Aucune des réponses précédentes.



24. Considérons l'équation $e^{-2x} + 1 = 2e^{2x}$ d'inconnue réelle x .

a) Cette équation admet deux solutions dans \mathbb{R} .

c) Cette équation n'admet pas de solution dans \mathbb{R} .

b) Cette équation admet une seule solution dans \mathbb{R} .

d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

25.
$$\frac{\sqrt{e^{-4} - 2e^{-2} + 1}}{(e^2)^3(e^{-3})^4} =$$

a) $e^4 - e^6$

b) $e^6 - e^4$

c) $e^4 + e^6$

d) aucune des réponses précédentes.

26. Le bénéfice d'une entreprise en milliers de dollars, réalisé après la vente d'un produit, est donné par la fonction définie par $B(x) = \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2}$ où la quantité produite x , en centaines d'unités, est comprise entre 1 et 11.

Alors le bénéfice maximal réalisable par l'entreprise est :

a) 1000 \$

b) 2000 \$

c) 6000 \$

d) 198 \$

27. Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers Ω tels que $p(\bar{A}) = 0,6$ et $p(A \cup B) = 0,8$.

La probabilité de l'évènement B est égale à :

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{2}$

d) aucune des réponses précédentes.

28. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix:

- Prix A: il reçoit 2000 dollars par jour pendant 15 jours;

- Prix B: il reçoit 1 dollar le 1^{er} jour, 2 dollars le 2^{ème} jour, 4 dollars le 3^{ème} jour et ainsi de suite pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

a) La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.

b) La valeur du prix B est plus élevée que la valeur du prix A.

c) La valeur du prix B est deux fois plus élevée que la valeur du prix A.

d) La valeur du prix A est deux fois plus élevée que la valeur du prix B.

29.
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x} =$$

a) 0

b) $\frac{1}{2}$

c) 1

d) aucune des réponses précédentes.

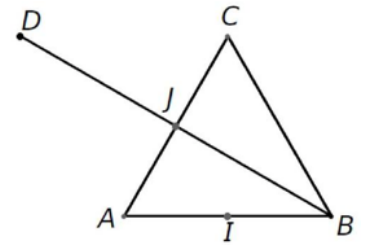
30. On considère un triangle équilatéral ABC de côté 2 tel que $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.

D est le symétrique du point B par rapport à la droite (AC) .

On considère la similitude directe s qui transforme A en D , et I en J .

- s est une similitude de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
- s est une similitude de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
- s est une similitude de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
- Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.



Exercice 2 : (8 points)

Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune. Le dessin ci-dessous en fournit une vue en perspective. Les quadrilatères $OAD'D$, $DD'C'C$ et $OAB'B$ sont des rectangles. Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité est le mètre.

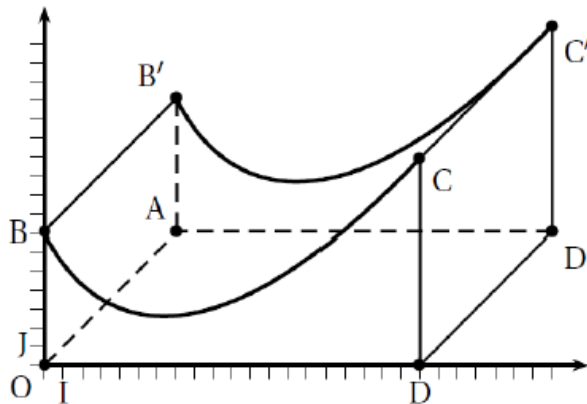
La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit $DD' = 10$, et sa longueur OD est de 20 mètres.

On voudrait peindre ce module. **Le but de ce problème est de déterminer alors l'aire des différentes surfaces à peindre.**

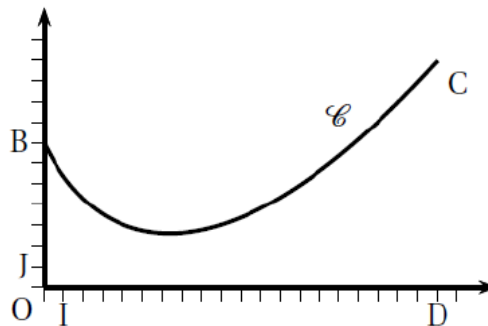
Le profil du module de skateboard a été modélisé, à partir d'une photo, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par :

$$f(x) = (x + 1) \ln(x + 1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O, I, J) .



Partie A : Etude du profil.



- Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 20]$, on a $f'(x) = \ln(x + 1) - 2$.
- En déduire les variations de f sur $[0 ; 20]$ et dresser son tableau de variation.
- Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'*inclinaison* du module de skateboard au point B.
- Etudier la convexité de la fonction f .
- Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.
 P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.
 P_2 : L'inclinaison de la piste en B est presque deux fois plus grande qu'en C.

6. Existe-t-il un point sur la courbe \mathcal{C} où la tangente est parallèle à la droite (BC) ? Si oui, déterminer les coordonnées de ce point.
7. Montrer que l'équation $f(x) = 7$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0 ; 20]$, dont l'une est >15 . Cette dernière solution sera notée α .
8. On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 20$ et $U_{n+1} = h(U_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, où h est la fonction définie sur $[\alpha ; 20]$ par $h(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{\ln(1+x) - 2}$.

- a) Montrer que la fonction h est croissante sur l'intervalle $[\alpha ; 20]$.
- b) En utilisant une démonstration par récurrence, prouver que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\alpha \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 20$.
- c) En déduire que la suite (U_n) est convergente. Quelle est sa limite ?
- d) On vous donne dans le tableau suivant les premiers termes de la suite (U_n) , arrondis à 6 chiffres après la virgule.

n	0	1	2	3	4	5
U_n	20,000000	16,232756	15,807457	15,801018	15,801016	15,801016

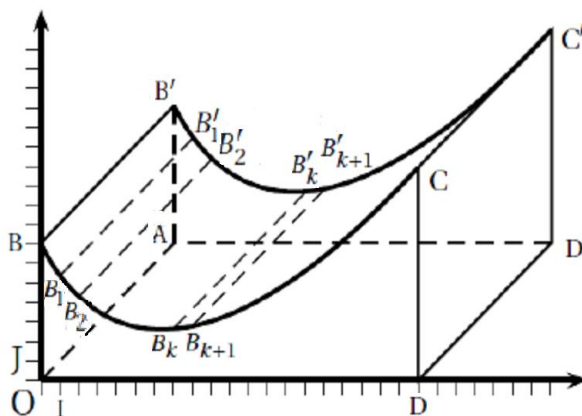
En vous basant sur les valeurs de ce tableau, déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

9. Montrer que la fonction g définie sur $[0 ; 20]$ par $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto (x+1)\ln(x+1)$ sur l'intervalle $[0 ; 20]$.
10. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{20} f(x)dx$. Quelle est la hauteur moyenne M du profil \mathcal{C} ?

Partie B : Peinture du module.

Les deux questions de cette partie peuvent être traitées indépendamment.

1. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre. Déterminer alors, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.
2. On souhaite maintenant peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module. Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k; f(k))$ pour k variant de 0 à 20. Ainsi, $B_0 = B$.



On décide d'approcher l'arc de la courbe \mathcal{C} allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_k B_{k+1}]$. Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_k B_{k+1} B'_{k+1} B'_k$ (voir figure).

- a) Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19, on a : $B_k B_{k+1} = \sqrt{1 + [f(k) - f(k+1)]^2}$.
- b) Un calcul numérique a permis d'obtenir la somme suivante : $S = \sum_{k=0}^{20} \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2} = 25,9835$

En déduire alors une valeur approchée de l'aire de la piste roulante.

Sachant que la peinture noire utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre, 47 litres de peinture sont-ils suffisants pour peindre la piste roulante de ce module ?

Concours d'entrée
MATHÉMATIQUES

SUJET A

CORRECTION

(Programme Libanais)

Exercice 1:

Question	Réponse
1	c
2	b
3	c
4	b
5	b
6	b
7	d
8	b
9	d
10	d
11	b
12	b , d
13	d
14	a
15	c
16	d
17	c
18	b
19	c
20	c
21	b
22	c
23	b
24	b
25	b
26	a
27	b
28	b
29	c
30	c

Exercice 2:

Partie A:

1. $\forall x \in [0; 20], f'(x) = (x+1)' \cdot \ln(x+1) + (x+1) \cdot (\ln(x+1))' + (-3x+7)'$
 $= 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3 = \ln(x+1) - 2$

2. • $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 2 \Leftrightarrow x = e^2 - 1.$

• $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - 2 > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 2 \Leftrightarrow x > e^2 - 1.$

D'où le tableau de variation suivant de f :

x	0	$e^2 - 1$	20
$f'(x)$		0	
		-	+
f	7	$10 - e^2 \approx 2,611$	$21\ln(21) - 53 \approx 10,935$

$$\begin{cases} f(0) = \ln(1) - 0 + 7 = 7 \\ f(e^2 - 1) = e^2 \ln(e^2) - 3(e^2 - 1) + 7 = 10 - e^2 \\ f(20) = 21 \cdot \ln(21) - 60 + 7 = 21 \cdot \ln(21) - 53 \end{cases}$$

3. La pente de la tangente en B est $f'(0) = \ln(1) - 2 = -2.$

4. $\forall x \in [0; 20], f''(x) = \frac{1}{x+1} > 0.$ Donc f est convexe sur son domaine.

5. P_1 ? La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas est :

$$\Delta f = f(20) - f(e^2 - 1) = (21 \ln(21) - 53) - (10 - e^2) = 21 \ln(21) + e^2 - 63 \approx 8,324 \Rightarrow \Delta f > 8.$$

∴ L'affirmation P_1 est exacte.

P_2 ? $\begin{cases} \text{Inclinaison en B} = |f'(0)| = 2 \\ \text{Inclinaison en C} = |f'(20)| = \ln(21) - 2 \approx 1,04 \end{cases}$ Donc Inclinaison en B $\approx 2 \times$ Inclinaison en C

∴ L'affirmation P_2 est exacte.

6. On cherche $a \in [0; 20]$ tel que: $f'(a) = \text{pente de (BC)} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{f(20) - f(0)}{20 - 0} = \frac{21 \ln(21) - 60}{20} = \frac{21 \ln(21)}{20} - 3.$

Or $f'(a) = \ln(a+1) - 2.$

Donc $\ln(a+1) - 2 = \frac{21 \ln(21)}{20} - 3 \Rightarrow \ln(a+1) = \frac{21 \ln(21)}{20} - 1 \Rightarrow a = e^{\frac{21 \ln(21)}{20} - 1} - 1 \approx 7,9957$

∴ Il existe un unique point sur la courbe \mathcal{C} où la tangente est parallèle à la droite (BC).

Ce point a pour coordonnées $(a \approx 7,9957; f(a) \approx 2,7742).$

NB : On peut aussi évoquer le théorème des accroissements finis pour justifier l'existence de ce point.

7. • Sur $[0; e^2 - 1]$: f est continue et strictement décroissante avec $f(0) = 7.$

Donc l'équation $f(x) = 7$ admet $x = 0$ comme unique solution sur $[0; e^2 - 1]$.

• Sur $[e^2 - 1; 20]$: f est continue et strictement croissante. De plus $\begin{cases} f(e^2 - 1) = 10 - e^2 \approx 2,611 \\ f(20) = 21 \ln(21) - 53 \approx 10,935 \end{cases}$

Comme $7 \in [f(e^2 - 1); f(20)]$ alors l'équation $f(x) = 7$ admet une unique solution $\alpha \in [e^2 - 1; 20].$
(corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Or $f(15) = 16 \cdot \ln(16) - 38 \approx 6,361 < 7,$ donc $\alpha > 15.$

∴ Sur $[0; 20],$ l'équation $f(x) = 7$ admet deux solutions qui sont 0 et $\alpha,$ avec $\alpha > 15.$

8. a) $\forall x \in [\alpha; 20], h'(x) = \left(\frac{x - \ln(1+x)}{\ln(1+x) - 2} \right)' = \frac{\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)(\ln(1+x) - 2) - (x - \ln(1+x))\left(\frac{1}{1+x}\right)}{(\ln(1+x) - 2)^2} = \frac{\ln(1+x) - 2 - \frac{\ln(1+x)}{1+x} + \frac{2}{1+x} - \frac{x}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x}}{(\ln(1+x) - 2)^2}$
 $= \frac{(1+x)\ln(1+x) - 2(1+x) + 2 - x}{(1+x)(\ln(1+x) - 2)^2} = \frac{f(x) - 7}{(1+x)(\ln(1+x) - 2)^2} \geq 0$

car $\forall x \in [\alpha; 20],$ on a: $(1+x)(\ln(1+x) - 2)^2 > 0$ et $f(x) \geq 7$ (puisque f est croissante sur $[\alpha; 20]$ et $f(\alpha) = 7$)

∴ h est croissante sur $[\alpha; 20].$

b) Initialisation:

Pour $n = 0$: $U_1 = h(U_0) = h(20) = \frac{20 - \ln(21)}{\ln(21) - 2} = 16,2327 \dots$ et $f(U_1) = 7,36 \dots > 7 \Rightarrow \alpha \leq U_1 \leq U_0 \leq 20$.

La proposition est donc vérifiée pour $n = 0$. (\rightarrow la proposition est initialisée au rang 0)

Hérédité:

Soit un entier naturel n tel que $\alpha \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 20$. (HR: Hypothèse de récurrence)

Montrons alors que $\alpha \leq U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq 20$.

Comme h est croissante sur $[\alpha; 20]$, (HR) $\Rightarrow h(\alpha) \leq h(U_{n+1}) \leq h(U_n) \leq h(20)$.

Or $f(\alpha) = 7 \Rightarrow (\alpha + 1) \ln(\alpha + 1) - 3\alpha + 7 = 7 \Rightarrow \ln(\alpha + 1) = \frac{3\alpha}{\alpha + 1}$

$$\Rightarrow h(\alpha) = \frac{\alpha - \ln(\alpha + 1)}{\ln(\alpha + 1) - 2} = \frac{\alpha - \frac{3\alpha}{\alpha + 1}}{\frac{3\alpha}{\alpha + 1} - 2} = \frac{\alpha(\alpha + 1) - 3\alpha}{3\alpha - 2(\alpha + 1)} = \frac{\alpha(\alpha - 2)}{\alpha - 2} = \alpha.$$

Par ailleurs $h(U_{n+1}) = U_{n+2}$, $h(U_n) = U_{n+1}$ et $h(20) = 16,2327 \dots < 20$.

D'où $\alpha \leq U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq 20$. (\rightarrow la proposition est donc héréditaire)

En conclusion, d'après le principe de récurrence, la proposition $\alpha \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 20$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) D'après la question précédente, la suite (U_n) est décroissante et minorée par α ; donc elle est convergente.

Soit L sa limite. On a alors $\alpha \leq L \leq 20$ et $L = h(L)$ ($\rightarrow L$ est un point fixe de la fonction h)

$$\begin{aligned} L = h(L) &\Leftrightarrow L = \frac{L - \ln(L + 1)}{\ln(L + 1) - 2} \\ &\Leftrightarrow L(\ln(L + 1) - 2) = L - \ln(L + 1) \\ &\Leftrightarrow (L + 1) \ln(L + 1) - 3L = 0 \\ &\Leftrightarrow f(L) - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow f(L) = 7 \end{aligned}$$

Donc $L = \alpha$

∴ La suite (U_n) converge vers α .

d) En observant les valeurs du tableau, on peut dire que $\alpha \approx 15,801$

$$\begin{aligned} 9. \forall x \in [0; 20], g'(x) &= \left[\frac{1}{2}(x + 1)^2 \right]' \cdot \ln(x + 1) + \frac{1}{2}(x + 1)^2 \cdot (\ln(x + 1))' - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right)' \\ &= (x + 1) \cdot \ln(x + 1) + \frac{1}{2}(x + 1)^2 \times \frac{1}{x + 1} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right)' \\ &= (x + 1) \cdot \ln(x + 1) + \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{1}{2}(x + 1) \\ &= (x + 1) \cdot \ln(x + 1) \end{aligned}$$

∴ La fonction g est une primitive de la fonction $x \mapsto (x + 1) \cdot \ln(x + 1)$ sur $[0; 20]$.

$$\begin{aligned} 10. \bullet I &= \int_0^{20} f(x) dx = \int_0^{20} ((x + 1) \ln(x + 1) - 3x + 7) dx = \int_0^{20} (x + 1) \ln(x + 1) dx + \int_0^{20} (-3x + 7) dx \\ &= [g(x)]_0^{20} + \left[-\frac{3}{2}x^2 + 7x \right]_0^{20} \\ &= g(20) - g(0) - \frac{3}{2} \times 20^2 + 7 \times 20 \\ &= \frac{21^2}{2} \ln(21) - \frac{20^2}{4} - \frac{20}{2} - \frac{3}{2} \times 20^2 + 7 \times 20 \\ &= \frac{441}{2} \ln(21) - 570 \approx 101,317 \end{aligned}$$

• La hauteur moyenne M du profil \mathcal{C} est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$:

$$M = \frac{1}{20 - 0} \int_0^{20} f(x) dx = \frac{1}{20} I = \frac{441}{40} \ln(21) - \frac{57}{2} \approx 5,066 \text{ m}$$

Partie B:

1. ■ Trouvons l'aire totale \mathcal{A} des 4 faces latérales :

$$\bullet \mathcal{A}_{\text{ODCB}} = \mathcal{A}_{\text{AD}'\text{C}'\text{B}'} = I$$

$$\bullet \mathcal{A}_{\text{OAB}'\text{B}} = f(0) \times 10 = 7 \times 10 = 70$$

$$\bullet \mathcal{A}_{\text{DD}'\text{C}'\text{C}} = f(20) \times 10 = (21 \cdot \ln(21) - 53) \times 10 = 210 \cdot \ln(21) - 530 \approx 109,350$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{ODCB}} + \mathcal{A}_{\text{DD}'\text{C}'\text{C}} + \mathcal{A}_{\text{AD}'\text{C}'\text{B}'} + \mathcal{A}_{\text{OAB}'\text{B}} = 2I + 210 \cdot \ln(21) - 530 + 70 = 651 \cdot \ln(21) - 1600 \approx 381,984 \text{ m}^2$$

∴ L'aire totale des 4 faces latérales vaut environ **381,984 m²**.

■ L'aire totale \mathcal{A} des 4 faces latérales étant d'environ 381,984 m², donc le nombre de litres de peinture rouge nécessaires pour peindre les 4 faces latérales est: $V = \mathcal{A}/5 \approx 76,397$ litres.

∴ Il faut donc au moins **77 litres** de peinture rouge pour peindre les 4 faces latérales.

2. a) $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, 19\}$,

$$B_k B_{k+1} = \sqrt{(x_{B_{k+1}} - x_{B_k})^2 + (y_{B_{k+1}} - y_{B_k})^2} = \sqrt{(k+1-k)^2 + (f(k+1) - f(k))^2} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$$

b) ■ L'aire de la piste roulante (surface supérieure du module) est:

$$\mathcal{A}' \cong (B_0 B_1 + B_1 B_2 + \dots + B_{19} B_{20}) \times 10$$

$$= 10 \times \sum_{k=0}^{19} B_k B_{k+1}$$

$$= 10 \sum_{k=0}^{19} \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$$

$$= 10 \left(S - \sqrt{1 + (22 \cdot \ln(22) - 21 \cdot \ln(21) - 3)^2} \right)$$

$$= 10 \left(25,9835 - \sqrt{1 + (22 \cdot \ln(22) - 21 \cdot \ln(21) - 3)^2} \right)$$

$$\approx \mathbf{245,204 \text{ m}^2}$$

NB:

$$f(k) = (k+1) \ln(k+1) - 3k + 7$$

$$f(k+1) = (k+2) \ln(k+2) - 3(k+1) + 7$$

$$\Rightarrow f(k+1) - f(k) = (k+2) \ln(k+2) - (k+1) \ln(k+1) - 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2} = \sqrt{1 + ((k+2) \ln(k+2) - (k+1) \ln(k+1) - 3)^2}$$

■ On a $\mathcal{A}'/5 \approx 49,041$.

Il faut donc plus de 49,041 litres de peinture noire pour peindre la surface supérieure du module.

∴ Les 47 litres de peinture noire **ne seront pas suffisants** pour peindre la surface supérieure du module.

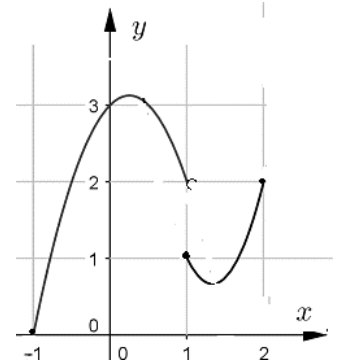
*Les smartphones, les documents et calculatrices graphiques sont strictement interdits.
Seules les calculatrices non graphiques sont autorisées.*

Exercice 1 : (12 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Répondre sur la feuille de réponses, en entourant pour chacune des questions **une seule** des réponses a, b, c ou d.

Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie sur $[-1 ; 2]$ dont la courbe est donnée ci-dessous :



- a) Pour tout réel k , l'équation $f(x) = k$ admet exactement 2 solutions.
- b) Pour tout réel $k > 3$, l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.
- c) L'équation $f(x) = x$ admet exactement 2 solutions.
- d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

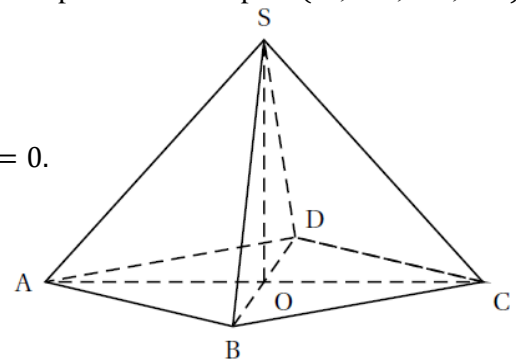
2. On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 0,9U_n + 20$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 200$ est :

- a) arithmétique. b) géométrique. c) décroissante. d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

3. On considère une pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-dessous. On note O le centre du carré ABCD et on se place dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS})$. Soient P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS].

- a) Le quadrilatère PQCD est un parallélogramme.
- b) Le vecteur $\vec{n}(1; 1; -3)$ est un vecteur normal au plan (PQC).
- c) Une équation cartésienne du plan (PQC) est donnée par $x + y - 3z + 2 = 0$.
- d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.



4. Considérons la suite (U_n) définie par $U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. La suite (S_n) définie par $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ est :

- a) décroissante. b) convergente c) divergente d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x+1}} & \text{si } x > -1 \\ \sqrt{|ax + 1|} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$

où a est une constante réelle

- a) La fonction f est continue si $a = -1$
- b) La fonction f est continue si $a = 1$
- c) La fonction f est continue si $a = 0$
- d) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f n'est jamais continue.

6. Considérons la fonction définie par $f(x) = 5 \ln(xe^x)$.

- a) La fonction f est convexe.
- b) La fonction f est concave.
- c) f n'est ni convexe, ni concave.
- d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

7. On considère la fonction **seuil**() suivante écrite en langage Python.

- a) **seuil**(0.01) renvoie la valeur 4.3
- b) **seuil**(0.01) renvoie la valeur 4
- c) **seuil**(0.01) renvoie la valeur 5
- d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

```
def seuil(p) :
    a = 0.5
    n = 1
    while 0.1*0.5**(n - 1) > p:
        n = n + 1
    return (n)
```

8. Le coût total de production, en milliers de dollars, d'un produit est donné par la fonction $C(x) = 2x + xe^{-x+2} + 10$ où la quantité produite x , en tonnes, est comprise entre 0,5 et 5 tonnes.

Si l'entreprise vend 2 tonnes de produit, au prix de 2000 dollars la tonne, alors :

- a) l'entreprise réalisera un bénéfice de 12000 dollars.
- b) l'entreprise réalisera une perte de 12000 dollars.
- c) l'entreprise réalisera une perte de 14000 dollars.
- d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

9. Considérons l'équation $\ln(x) + \ln(x - 1) = \ln(x + 1)$, d'inconnue réelle x .

L'ensemble S des solutions de cette équation est :

- a) $S = \{ 2 \}$
- b) $S = \{ -1 + \sqrt{2} ; -1 - \sqrt{2} \}$
- c) $S = \{ 1 + \sqrt{2} ; 1 - \sqrt{2} \}$
- d) $S = \{ 1 + \sqrt{2} \}$

10. Un récipient contenant initialement 1 litre d'eau est laissé au soleil. Toutes les heures, le volume d'eau diminue de 15 %.

Le volume d'eau devient inférieur à un quart de litre au bout de :

- a) 8 heures.
- b) 3 heures.
- c) 2 heures
- d) Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

11. La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

- a) $f(x) = e^{-3x}$
- b) $f(x) = -\frac{4}{3}e^{-3x} + \frac{7}{3}$
- c) $f(x) = e^{-3x} + \frac{7}{3}$
- d) $f(x) = -\frac{10}{3}e^{-3x} - \frac{7}{3}$

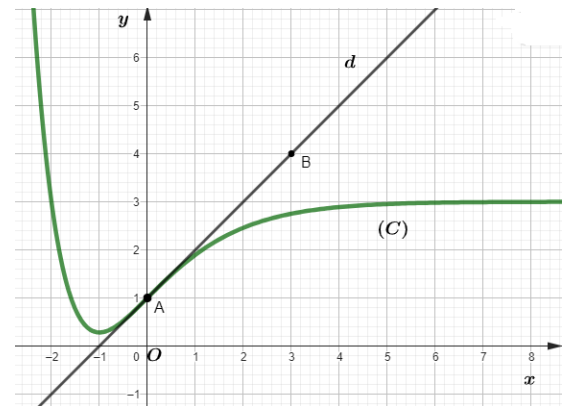
12. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 3$ où a et b sont deux constantes réelles.

La représentation graphique (C) de f est donnée ci-dessous.

Le point $A(0 ; 1)$ est un point de la courbe (C). La tangente d à la courbe (C) en A passe par le point $B(3 ; 4)$.

Alors :

- a) $a = 1$ et $b = -2$.
- b) $a = -1$ et $b = -2$.
- c) $a = 1$ et $b = 2$.
- d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.



13. La limite, quand n tend vers $+\infty$, de la suite numérique (U_n) définie par $U_n = \frac{1+2^n}{3+3^n}$ vaut :

- a) 1
- b) $\frac{2}{3}$
- c) $+\infty$
- d) 0

14. On considère une fonction h , définie et continue sur \mathbb{R} , dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

On note H la primitive de h , définie sur \mathbb{R} , qui s'annule en 0.

Elle vérifie la propriété :

- a) H est positive sur $] -\infty ; 0]$
- b) H est croissante sur $] -\infty ; 1]$
- c) H est négative sur $] -\infty ; 1]$
- d) H est croissante sur \mathbb{R}

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de h	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$		

15. Une maladie touche 20% de la population d'un pays. Lors d'un dépistage de cette maladie, on utilise un test biologique qui a les caractéristiques suivantes:

- lorsqu'une personne est malade, la probabilité d'avoir un test positif est de 85%.
- lorsqu'une personne n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est de 95%.

On choisit une personne au hasard dans cette population. La probabilité que cette personne soit testée positive est égale à :

- a) 85% b) 90% c) 21% d) Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

16. L'ensemble des solutions de l'inéquation suivante $\sin(x) < \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ est :

- a) $[\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}]$ b) $[0; \frac{\pi}{6}]$ c) $[0; \frac{\pi}{6}] \cup [\pi; 2\pi]$ d) Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. On dispose d'un dé cubique non truqué numéroté de 1 à 6, et d'une urne contenant 2 boules blanches et 3 boules noires, indiscernables au toucher. On lance le dé. Si on obtient un nombre multiple de 3 alors on tire au hasard 2 boules de l'urne, successivement avec remise. Sinon on tire au hasard simultanément 2 boules de l'urne.

Considérons les événements suivants :

M : « Le lancer du dé donne un nombre multiple de 3 » , B : « Les 2 boules tirées sont blanches ».

Alors :

- a) $p(B) = \frac{13}{100}$ b) $p(B) = \frac{13}{50}$ c) $p(B) = \frac{3}{25}$ d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

18. On considère l'équation différentielle (E) suivante : $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$.

Soit f l'unique solution de (E) telle que $f(0) = 1$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation :

- a) $x = 3y + 1$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = 1$ d) Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

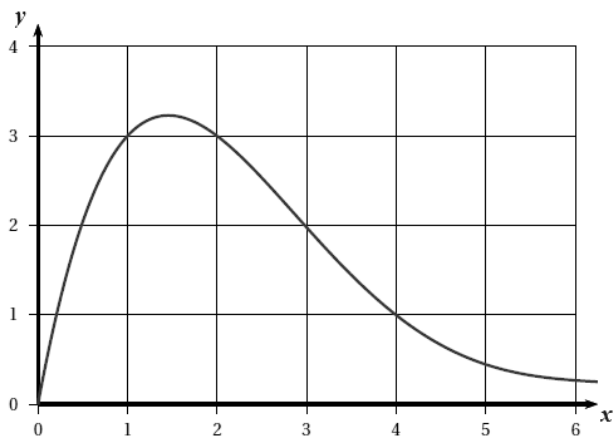
19. Dans le métro parisien, il y a 9% des voyageurs qui fraudent. Chaque jour, à la station Alésia, on contrôle 100 personnes. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de fraudeurs sur ces 100 personnes. On admet que la taille de l'échantillon contrôlé est faible devant la taille de toute la population de voyageurs, si bien qu'on peut considérer que le tirage est un tirage successif avec remise. Alors:

- a) X suit une loi binomiale d'espérance 9 et de variance 91.
 b) La probabilité d'obtenir 5 fraudeurs sur les 100 contrôlés est d'environ 5,71%.
 c) La probabilité d'obtenir 9 fraudeurs sur les 100 contrôlés dépasse 99%.
 d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

20. La courbe représentative d'une fonction f est donnée ci-contre.

Un encadrement de l'intégrale $\int_1^5 f(x)dx$ est donné par :

- a) $0 \leq I \leq 4$ b) $1 \leq I \leq 5$
 c) $5 \leq I \leq 10$ d) $10 \leq I \leq 15$



21. On considère la fonction **mystere** définie ci-dessous, écrite en langage Python, qui prend une liste L de nombres en paramètre. On rappelle que `len(L)` renvoie la longueur, c'est-à-dire le nombre d'éléments, de la liste L.

L'exécution de **mystere** ([2, 3, 7, 0, 6]) renvoie:

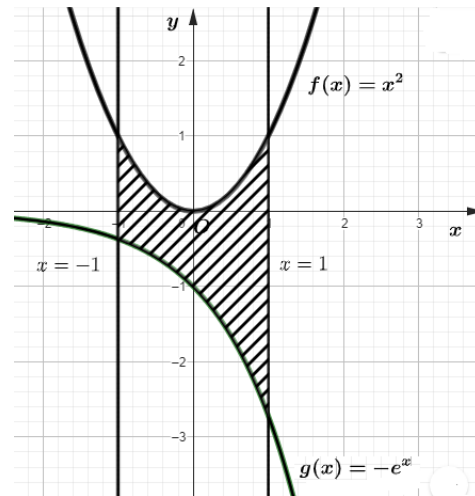
- a) 2 b) 6
 c) 3 d) aucun des résultats précédents.

```
def mystere(L) :
    M=L[0]
    # on initialise M avec le premier élément de la liste L
    for i in range (len(L)) :
        if L[i] > M :
            M = L[i]
    return M
```

22. Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses. On choisit au hasard n pièces produites par la chaîne de fabrication. Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise. Quel est le plus petit entier naturel n tel que la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à 95% ?
- a) 50 b) 73 c) 74 d) Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

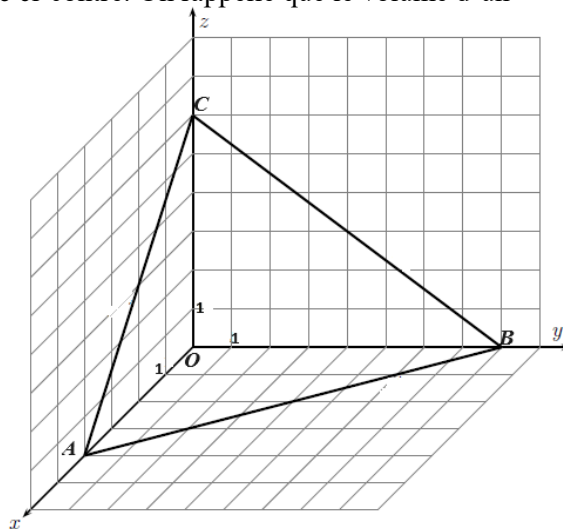
23. L'aire de la surface hachurée représentée sur le graphique ci-contre vaut :

- a) $\frac{2}{3} - e + e^{-1}$ u.a. b) $\frac{2}{3} + e - e^{-1}$ u.a.
- c) $-\frac{2}{3} + e - e^{-1}$ u.a. d) aucune des réponses précédentes.



24. On a dessiné le plan (ABC) dans le repère orthonormé donné par la figure ci-contre. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est égale à : $V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur associée}$.

- a) Le triangle ABC est isocèle.
b) Le volume du tétraèdre $OABC$ est 32 u.v.
c) Le point $D(1; 2; 4)$ appartient au plan (ABC) .
d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.



25. Considérons l'équation $e^{-2x} + 1 = 2e^{2x}$ d'inconnue réelle x .

- a) Cette équation admet deux solutions dans \mathbb{R} .
b) Cette équation admet une seule solution dans \mathbb{R} .
c) Cette équation n'admet pas de solution dans \mathbb{R} .
d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

26.
$$\frac{\sqrt{e^{-4} - 2e^{-2} + 1}}{(e^2)^3(e^{-3})^4} =$$

- a) $e^4 - e^6$ b) $e^6 - e^4$ c) $e^4 + e^6$ d) aucune des réponses précédentes.

27. Le bénéfice d'une entreprise en milliers de dollars, réalisé après la vente d'un produit, est donné par la fonction définie par $B(x) = \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2}$ où la quantité produite x , en centaines d'unités, est comprise entre 1 et 11. Alors le bénéfice maximal réalisable par l'entreprise est :

- a) 1000 \$ b) 2000 \$ c) 6000 \$ d) 198 \$

28. Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers Ω tels que $p(\bar{A}) = 0,6$ et $p(A \cup B) = 0,8$.
La probabilité de l'évènement B est égale à :
- a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) aucune des réponses précédentes.
29. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix:
- Prix A: il reçoit 2000 dollars par jour pendant 15 jours;
 - Prix B: il reçoit 1 dollar le 1^{er} jour, 2 dollars le 2^{ème} jour, 4 dollars le 3^{ème} jour et ainsi de suite pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.
- a) La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.
b) La valeur du prix B est plus élevée que la valeur du prix A.
c) La valeur du prix B est deux fois plus élevée que la valeur du prix A.
d) La valeur du prix A est deux fois plus élevée que la valeur du prix B.
30. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x} =$
- a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) aucune des réponses précédentes.

Exercice 2 : (8 points)

Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune. Le dessin ci-dessous en fournit une vue en perspective. Les quadrilatères $OAD'D$, $DD'C'C$ et $OAB'B$ sont des rectangles. Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité est le mètre.

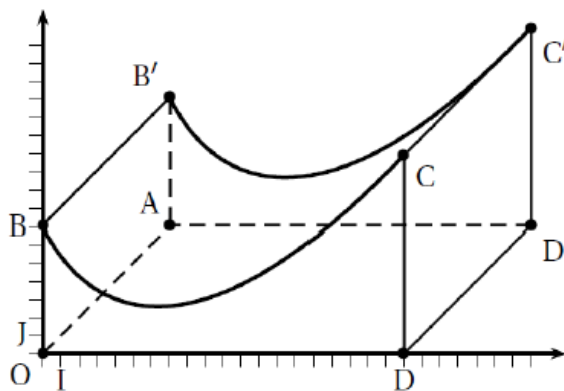
La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit $DD' = 10$, et sa longueur OD est de 20 mètres.

On voudrait peindre ce module. **Le but de ce problème est de déterminer alors l'aire des différentes surfaces à peindre.**

Le profil du module de skateboard a été modélisé, à partir d'une photo, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par :

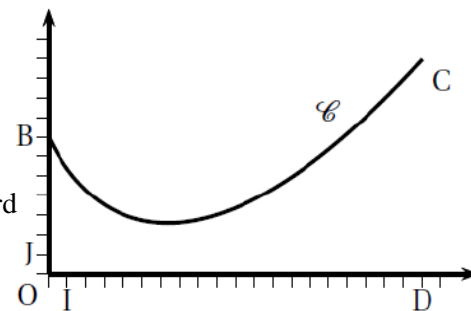
$$f(x) = (x + 1) \ln(x + 1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O, I, J) .



Partie A : Etude du profil.

1. Montrer que pour tout réel $x \in [0; 20]$, on a $f'(x) = \ln(x + 1) - 2$.
2. En déduire les variations de f sur $[0 ; 20]$ et dresser son tableau de variation.
3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'*inclinaison* du module de skateboard au point B.
4. Etudier la convexité de la fonction f .
5. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.
 P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.
 P_2 : L'*inclinaison* de la piste en B est presque deux fois plus grande qu'en C.
6. Existe-t-il un point sur la courbe \mathcal{C} où la tangente est parallèle à la droite (BC) ? Si oui, déterminer les coordonnées de ce point.
7. Montrer que l'équation $f(x) = 7$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0 ; 20]$, dont l'une est >15 . Cette dernière solution sera notée α .



8. On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 20$ et $U_{n+1} = h(U_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, où h est la fonction définie sur $[\alpha; 20]$ par $h(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{\ln(1+x) - 2}$.

- a) Montrer que la fonction h est croissante sur l'intervalle $[\alpha; 20]$.
 b) En utilisant une démonstration par récurrence, prouver que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\alpha \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 20$.
 c) En déduire que la suite (U_n) est convergente. Quelle est sa limite ?
 d) On vous donne dans le tableau suivant les premiers termes de la suite (U_n) , arrondis à 6 chiffres après la virgule.

n	0	1	2	3	4	5
U_n	20,000000	16,232756	15,807457	15,801018	15,801016	15,801016

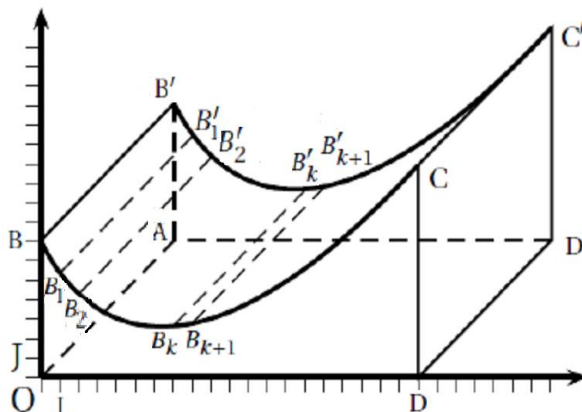
En vous basant sur les valeurs de ce tableau, déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

9. Montrer que la fonction g définie sur $[0; 20]$ par $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto (x+1)\ln(x+1)$ sur l'intervalle $[0; 20]$.
10. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{20} f(x)dx$. Quelle est la hauteur moyenne M du profil \mathcal{C} ?

Partie B : Peinture du module.

Les deux questions de cette partie peuvent être traitées indépendamment.

1. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre. Déterminer alors, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.
2. On souhaite maintenant peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module. Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k; f(k))$ pour k variant de 0 à 20. Ainsi, $B_0 = B$.



On décide d'approcher l'arc de la courbe \mathcal{C} allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_k B_{k+1}]$. Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_k B_{k+1} B'_{k+1} B'_k$ (voir figure).

- a) Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19, on a $B_k B_{k+1} = \sqrt{1 + [f(k) - f(k+1)]^2}$.
 b) Recopier et compléter alors l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables	S : réel K : entier
Fonction f	définie par $f(x) = (x+1) \ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend la valeur 0 Pour K variant de ... à ... S prend la valeur Fin Pour
Sortie	Afficher ...

Exercice 1:

Question	Réponse
1	c
2	b
3	b
4	b
5	b
6	b
7	c
8	b
9	d
10	d
11	b
12	b , d
13	d
14	a
15	c
16	d
17	c
18	b
19	b
20	c
21	d
22	c
23	b
24	b
25	b
26	b
27	a
28	b
29	b
30	c

Exercice 2:

Partie A:

1. $\forall x \in [0; 20], f'(x) = (x+1)' \cdot \ln(x+1) + (x+1) \cdot (\ln(x+1))' + (-3x+7)'$
 $= 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3 = \ln(x+1) - 2$

2. • $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 2 \Leftrightarrow x = e^2 - 1.$

• $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - 2 > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 2 \Leftrightarrow x > e^2 - 1.$

D'où le tableau de variation suivant de f :

x	0	$e^2 - 1$	20	
$f'(x)$		-	0	+
f	7	$10 - e^2 \approx 2,611$	$21 \ln(21) - 53 \approx 10,935$	

$$\begin{cases} f(0) = \ln(1) - 0 + 7 = 7 \\ f(e^2 - 1) = e^2 \ln(e^2) - 3(e^2 - 1) + 7 = 10 - e^2 \\ f(20) = 21 \cdot \ln(21) - 60 + 7 = 21 \cdot \ln(21) - 53 \end{cases}$$

3. La pente de la tangente en B est $f'(0) = \ln(1) - 2 = -2.$

4. $\forall x \in [0; 20], f''(x) = \frac{1}{x+1} > 0.$ Donc f est convexe sur son domaine.

5. P_1 ? La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas est :

$$\Delta f = f(20) - f(e^2 - 1) = (21 \ln(21) - 53) - (10 - e^2) = 21 \ln(21) + e^2 - 63 \approx 8,324 \Rightarrow \Delta f > 8.$$

∴ L'affirmation P_1 est exacte.

P_2 ? $\begin{cases} \text{Inclinaison en B} = |f'(0)| = 2 \\ \text{Inclinaison en C} = |f'(20)| = \ln(21) - 2 \approx 1,04 \end{cases}$ Donc Inclinaison en B $\approx 2 \times$ Inclinaison en C

∴ L'affirmation P_2 est exacte.

6. On cherche $a \in [0; 20]$ tel que: $f'(a) = \text{pente de (BC)} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{f(20) - f(0)}{20 - 0} = \frac{21 \ln(21) - 60}{20} = \frac{21 \ln(21)}{20} - 3.$

Or $f'(a) = \ln(a+1) - 2.$

$$\text{Donc } \ln(a+1) - 2 = \frac{21 \ln(21)}{20} - 3 \Rightarrow \ln(a+1) = \frac{21 \ln(21)}{20} - 1 \Rightarrow a = e^{\frac{21 \ln(21)}{20} - 1} - 1 \approx 7,9957$$

∴ Il existe un unique point sur la courbe \mathcal{C} où la tangente est parallèle à la droite (BC).

Ce point a pour coordonnées $(a \approx 7,9957; f(a) \approx 2,7742).$

NB : On peut aussi évoquer le théorème des accroissements finis pour justifier l'existence de ce point.

7. • Sur $[0; e^2 - 1[$: f est continue et strictement décroissante avec $f(0) = 7.$

Donc l'équation $f(x) = 7$ admet $x = 0$ comme unique solution sur $[0; e^2 - 1[.$

• Sur $[e^2 - 1; 20]$: f est continue et strictement croissante. De plus $\begin{cases} f(e^2 - 1) = 10 - e^2 \approx 2,611 \\ f(20) = 21 \ln(21) - 53 \approx 10,935 \end{cases}$

Comme $7 \in [f(e^2 - 1); f(20)]$ alors l'équation $f(x) = 7$ admet une unique solution $\alpha \in [e^2 - 1; 20].$
(corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Or $f(15) = 16 \cdot \ln(16) - 38 \approx 6,361 < 7,$ donc $\alpha > 15.$

∴ Sur $[0; 20],$ l'équation $f(x) = 7$ admet deux solutions qui sont 0 et $\alpha,$ avec $\alpha > 15.$

8. a) $\forall x \in [\alpha; 20], h'(x) = \left(\frac{x - \ln(1+x)}{\ln(1+x) - 2} \right)' = \frac{\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)(\ln(1+x) - 2) - (x - \ln(1+x))\left(\frac{1}{1+x}\right)}{(\ln(1+x) - 2)^2} = \frac{\ln(1+x) - 2 - \frac{\ln(1+x)}{1+x} + \frac{2}{1+x} - \frac{x}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x}}{(\ln(1+x) - 2)^2}$
 $= \frac{(1+x)\ln(1+x) - 2(1+x) + 2 - x}{(1+x)(\ln(1+x) - 2)^2} = \frac{f(x) - 7}{(1+x)(\ln(1+x) - 2)^2} \geq 0$

car $\forall x \in [\alpha; 20],$ on a: $(1+x)(\ln(1+x) - 2)^2 > 0$ et $f(x) \geq 7$ (puisque f est croissante sur $[\alpha; 20]$ et $f(\alpha) = 7$)

∴ h est croissante sur $[\alpha; 20].$

b) Initialisation:

Pour $n = 0$: $U_1 = h(U_0) = h(20) = \frac{20 - \ln(21)}{\ln(21) - 2} = 16,2327 \dots$ et $f(U_1) = 7,36 \dots > 7 \Rightarrow \alpha \leq U_1 \leq U_0 \leq 20$.

La proposition est donc vérifiée pour $n = 0$. (\rightarrow la proposition est initialisée au rang 0)

Hérédité:

Soit un entier naturel n tel que $\alpha \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 20$. (HR: Hypothèse de récurrence)

Montrons alors que $\alpha \leq U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq 20$.

Comme h est croissante sur $[\alpha; 20]$, (HR) $\Rightarrow h(\alpha) \leq h(U_{n+1}) \leq h(U_n) \leq h(20)$.

Or $f(\alpha) = 7 \Rightarrow (\alpha + 1) \ln(\alpha + 1) - 3\alpha + 7 = 7 \Rightarrow \ln(\alpha + 1) = \frac{3\alpha}{\alpha + 1}$

$$\Rightarrow h(\alpha) = \frac{\alpha - \ln(\alpha + 1)}{\ln(\alpha + 1) - 2} = \frac{\alpha - \frac{3\alpha}{\alpha + 1}}{\frac{3\alpha}{\alpha + 1} - 2} = \frac{\alpha(\alpha + 1) - 3\alpha}{3\alpha - 2(\alpha + 1)} = \frac{\alpha(\alpha - 2)}{\alpha - 2} = \alpha.$$

Par ailleurs $h(U_{n+1}) = U_{n+2}$, $h(U_n) = U_{n+1}$ et $h(20) = 16,2327 \dots < 20$.

D'où $\alpha \leq U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq 20$. (\rightarrow la proposition est donc héréditaire)

En conclusion, d'après le principe de récurrence, la proposition $\alpha \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 20$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) D'après la question précédente, la suite (U_n) est décroissante et minorée par α ; donc elle est convergente.

Soit L sa limite. On a alors $\alpha \leq L \leq 20$ et $L = h(L)$ ($\rightarrow L$ est un point fixe de la fonction h)

$$\begin{aligned} L = h(L) &\Leftrightarrow L = \frac{L - \ln(L+1)}{\ln(L+1) - 2} \\ &\Leftrightarrow L(\ln(L+1) - 2) = L - \ln(L+1) \\ &\Leftrightarrow (L+1)\ln(L+1) - 3L = 0 \\ &\Leftrightarrow f(L) - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow f(L) = 7 \end{aligned}$$

Donc $L = \alpha$

∴ La suite (U_n) converge vers α .

d) En observant les valeurs du tableau, on peut dire que $\alpha \approx 15,801$

$$\begin{aligned} 9. \forall x \in [0; 20], g'(x) &= \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 \right]' \cdot \ln(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^2 \cdot (\ln(x+1))' - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right)' \\ &= (x+1) \cdot \ln(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^2 \times \frac{1}{x+1} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right)' \\ &= (x+1) \cdot \ln(x+1) + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x+1) \\ &= (x+1) \cdot \ln(x+1) \end{aligned}$$

∴ La fonction g est une primitive de la fonction $x \mapsto (x+1) \cdot \ln(x+1)$ sur $[0; 20]$.

$$\begin{aligned} 10. \bullet I &= \int_0^{20} f(x) dx = \int_0^{20} ((x+1)\ln(x+1) - 3x + 7) dx = \int_0^{20} (x+1)\ln(x+1) dx + \int_0^{20} (-3x+7) dx \\ &= [g(x)]_0^{20} + \left[-\frac{3}{2}x^2 + 7x \right]_0^{20} \\ &= g(20) - g(0) - \frac{3}{2} \times 20^2 + 7 \times 20 \\ &= \frac{21^2}{2} \ln(21) - \frac{20^2}{4} - \frac{20}{2} - \frac{3}{2} \times 20^2 + 7 \times 20 \\ &= \frac{441}{2} \ln(21) - 570 \approx 101,317 \end{aligned}$$

• La hauteur moyenne M du profil \mathcal{C} est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$:

$$M = \frac{1}{20-0} \int_0^{20} f(x) dx = \frac{1}{20} I = \frac{441}{40} \ln(21) - \frac{57}{2} \approx 5,066 \text{ m}$$

Partie B:

1. ■ Trouvons l'aire totale \mathcal{A} des 4 faces latérales :

$$\bullet \mathcal{A}_{\text{ODCB}} = \mathcal{A}_{\text{AD}'\text{C}'\text{B}'} = l$$

$$\bullet \mathcal{A}_{\text{OAB}'\text{B}} = f(0) \times 10 = 7 \times 10 = 70$$

$$\bullet \mathcal{A}_{\text{DD}'\text{C}'\text{C}} = f(20) \times 10 = (21 \cdot \ln(21) - 53) \times 10 = 210 \cdot \ln(21) - 530 \approx 109,350$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{ODCB}} + \mathcal{A}_{\text{DD}'\text{C}'\text{C}} + \mathcal{A}_{\text{AD}'\text{C}'\text{B}'} + \mathcal{A}_{\text{OAB}'\text{B}} = 2l + 210 \cdot \ln(21) - 530 + 70 = 651 \cdot \ln(21) - 1600 \approx 381,984 \text{ m}^2$$

∴ L'aire totale des 4 faces latérales vaut environ $381,984 \text{ m}^2$.

■ L'aire totale \mathcal{A} des 4 faces latérales étant d'environ $381,984 \text{ m}^2$, donc le nombre de litres de peinture rouge nécessaires pour peindre les 4 faces latérales est: $V = \mathcal{A}/5 \approx 76,397$ litres.

∴ Il faut donc au moins 77 litres de peinture rouge pour peindre les 4 faces latérales.

2. a) $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, 19\}$,

$$B_k B_{k+1} = \sqrt{(x_{B_{k+1}} - x_{B_k})^2 + (y_{B_{k+1}} - y_{B_k})^2} = \sqrt{(k+1-k)^2 + (f(k+1) - f(k))^2} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$$

b)

Variables	S : réel K : entier
Fonction f	définie par $f(x) = (x+1) \ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend la valeur 0 Pour K variant de 0 à 19 S prend la valeur $S + 10 \cdot \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$ Fin Pour
Sortie	Afficher S

NB: Pour obtenir une estimation de l'aire S de la surface supérieure, il faut ajouter les aires des petits rectangles $B_k B_{k+1} B_{k+1}' B_k'$.

$$\text{Ainsi } S = \sum_{k=0}^{19} 10 \cdot \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$$