Concours d'entrée (2025-2026)

MATHÉMATIQUES

SUJET A

(Programme Libanais)

Date : 17/07/2025
Durée : 2h30

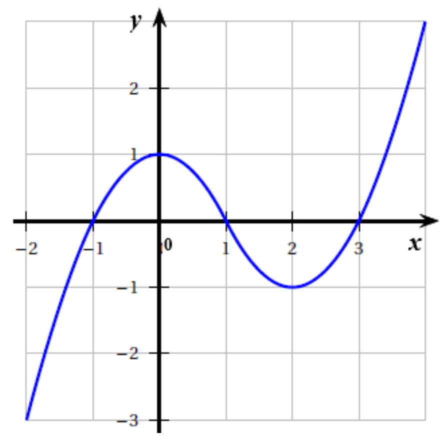
Les smartphones, les documents et les calculatrices graphiques sont strictement interdits.

Exercice 1 : (12 points)

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Répondre sur la feuille de réponses, en entourant pour chacune des questions **une seule** des réponses a, b, c ou d.*

Aucune justification n'est demandée.

1. On vous donne ci-contre la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;\ 4]$.
Par lecture graphique de la courbe de f', déterminer l'affirmation correcte pour f :



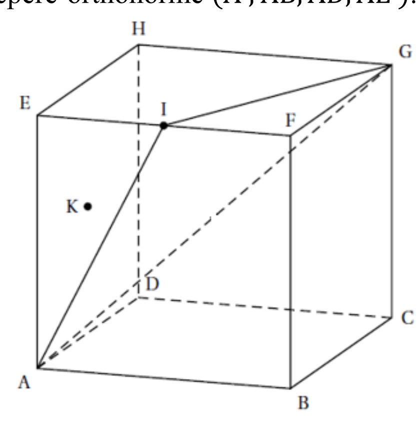
a) f est décroissante sur $[0\,;2]$.
b) f est décroissante sur $[-1\,;0]$.
c) f admet un maximum en 1 sur $[0\,;2]$.
d) f admet un maximum en 3 sur $[2\,;4]$.

2. On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{3-U_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{U_n} - \frac{1}{2}$ est :

a) arithmétique. **b)** géométrique. **c)** constante. **d)** Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

3. On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. L'espace est muni du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. Le point I est le milieu du segment [EF] et K est le centre du carré ADHE.



a) L'angle $\widehat{AIG}$ vaut 90° .
b) Le vecteur $\overrightarrow{BK}$ est normal au plan (AIG).
c) La droite (BK) coupe le plan (AIG) au point $L(\frac{1}{3};\ 0;\ 1)$.
d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

4. Une écriture exponentielle du nombre complexe $z = \frac{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i.\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^3}{(1+i)^2}$ est donné par :

a) $z = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{15}}$ **b)** $z = e^{-i\frac{\pi}{15}}$ **c)** $z = e^{i\frac{\pi}{15}}$ **d)** Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. Si $3x - y = 16$ alors $\sqrt{\frac{8^{x-1}}{2^{y+1}}} =$

a) 3^3 **b)** 2^6 **c)** 2^{10} **d)** Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. Soit f la fonction donnée par $f(x)=\begin{cases}\frac{ax^2+(a+1)x+1}{2x^2+x-1} & \text{si } x\neq -1\\ \frac{1}{3} & \text{si } x=-1\end{cases}$ où a est une constante réelle.

a) La fonction f est continue en -1 si $a=-1$.
b) La fonction f est continue en -1 si $a=\frac{1}{3}$.
c) La fonction f est continue en -1 si $a=2$.
d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

7. Considérons la fonction définie par $f(x)=x^{1000}+x$.

a) La fonction f est concave.
b) La courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse 0.
c) La courbe de f n'admet pas de point d'inflexion.
d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

8. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|3z+i|=|3iz+1|$. Alors on en déduit que :

a) z est forcément imaginaire pur.
b) z est forcément réel.
c) z est forcément nul.
d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=2\left(\frac{1+\ln(x)}{x}\right)$.
Dans une entreprise, on a modélisé par la fonction f sur l'intervalle $[0{,}2\ ;\ +\infty[$ le bénéfice mensuel (éventuellement négatif), en milliers d'euros, réalisé en vendant x milliers d'objets fabriqués. Alors :

a) Le bénéfice mensuel de l'entreprise peut dépasser 2100 euros.
b) Le bénéfice mensuel maximal de l'entreprise vaut 2000 euros.
c) L'entreprise réalisera une perte si elle vend plus de 1000 pièces.
d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

10. Considérons l'équation $3\ln(x+1)-2\ln(x)=\ln(x+7)$, d'inconnue réelle x.
L'ensemble S des solutions de cette équation est :

a) $S=\{\frac{1}{4}\ ;\ -1\}$ **b)** $S=\{-\frac{1}{4}\ ;1\}$ **c)** $S=\{\frac{1}{4}\ ;1\}$ **d)** $S=\{1\}$

11. Une machine industrielle perd 5% de sa valeur chaque année en raison de l'usure. La valeur initiale de la machine est de 10000 euros. Après combien d'années la machine aura-t-elle perdu 50% de sa valeur ?

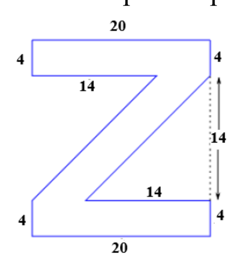
a) 10 ans. **b)** 7 ans. **c)** 14 ans. **d)** Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. La solution f de l'équation différentielle $y'+2y=-2$ telle que $f(1)=0$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x)=e^{-2x}-e^{-2}$ **b)** $f(x)=-x^2-2x+3$ **c)** $f(x)=e^{2-2x}-1$ **d)** Aucune des réponses précédentes.

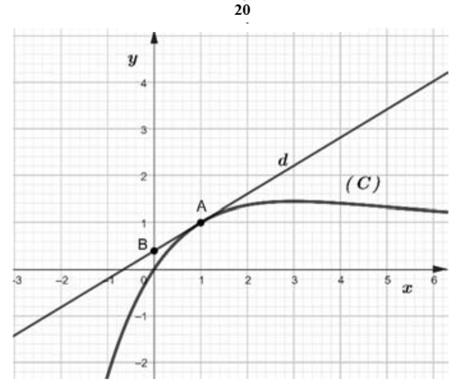
13. Quelle est l'aire de cette figure en forme de Z ?

a) 168 **b)** 220 **c)** 240 **d)** 244



14. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)e^{-kx}+1$ où k est une constante réelle.
La représentation graphique *(C)* de f est donnée ci-contre, dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan. La tangente d à la courbe *(C)* au point A d'abscisse 1 passe par le point $B(0\ ;1-\frac{1}{\sqrt{e}})$. Alors :

a) $k=1$.
b) $k=-1$.
c) $k=\frac{1}{2}$.
d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.



15. L'ensemble des solutions de l'inéquation $2\cos(x)-\sqrt{3}\geq 0$ sur l'intervalle $[0\ ;2\pi]$ est :

a) $[\frac{\pi}{6}\ ;\ 2\pi]$ **b)** $[-\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6}]$ **c)** $\left[0\ ;\frac{\pi}{6}\right]\cup[\frac{11\pi}{6};2\pi]$ **d)** Aucune des réponses précédentes.

16. Pour maintenir en bon état de fonctionnement son parc automobile, une très grande entreprise de transport décide de faire contrôler les véhicules de son parc automobile.
On sait que 20% des véhicules sont sous garantie. Parmi les véhicules sous garantie on a 1% de véhicules défectueux et parmi les véhicules qui ne sont plus sous garantie on a 10 % de véhicules défectueux.
On choisit un véhicule au hasard dans le parc. La probabilité que le véhicule soit défectueux est égale à :
a) 11 % **b)** 8,2 % **c)** 0,082 % **d)** Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. La limite, quand n tend vers $+\infty$, de la suite numérique (U_n) définie par $U_n = n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$ vaut :
a) 1 **b)** $-\infty$ **c)** $+\infty$ **d)** 0

18. On lance deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité que la somme des chiffres obtenus soit supérieure ou égale à 11 ?
a) $\frac{1}{36}$ **b)** $\frac{1}{12}$ **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

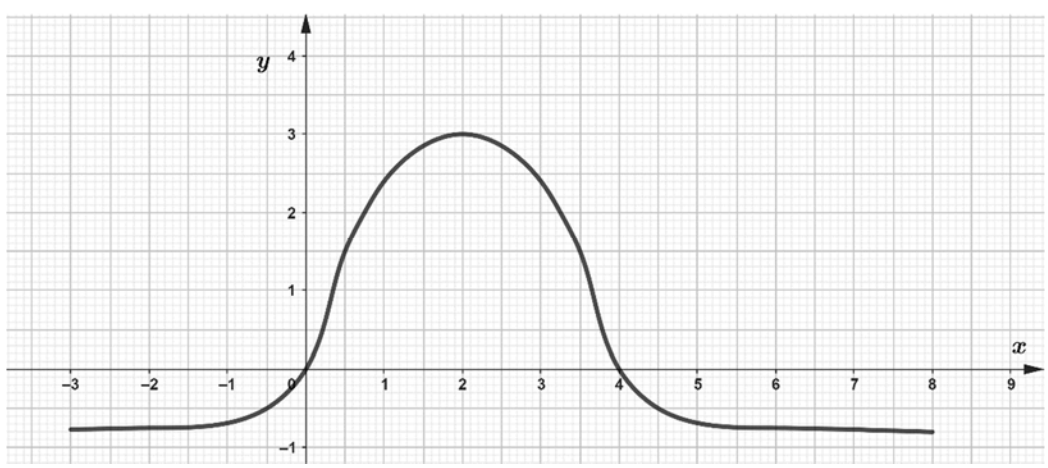
19. On considère l'équation différentielle (E) suivante : $y' + y = 2\sin(x)$.
Soit f l'unique solution de (E) telle que $f(0) = 2$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation :
a) $x = y - 2$ **b)** $y = -2x + 2$ **c)** $y = 2$ **d)** Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

20. (U_n) est une suite géométrique telle que $U_0 = 2$ et $U_3 = \frac{128}{125}$.
Alors la suite (S_n) définie par $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ tend vers :
a) 0 **b)** 10 **c)** $+\infty$ **d)** Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

21. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln^2(1+\sqrt{x}) + e^{2x} - 1}{x} =$
a) $+\infty$ **b)** 0 **c)** 3 **d)** Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

22. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M d'affixe $z \neq -i$, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-i}{z+i}$.
Lorsque le point M se déplace sur l'axe réel, le point M' se déplace sur :
a) l'axe réel. **b)** l'axe imaginaire. **c)** le cercle trigonométrique. **d)** Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

23. On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $I = [-3\,;\,8]$.
On définit la fonction F sur I par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
Alors :
a) $0 \leq F(4) \leq 4$
b) $6 \leq F(4) \leq 12$
c) $-1 \leq F(4) \leq 4$
d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.



24. La forme algébrique du nombre complexe $z = \frac{(1+i)^{13}}{(1-i)^{11}}$ est donnée par :
a) $z = 2 + i$ **b)** $z = 2i$ **c)** $z = -2$ **d)** Aucune des réponses précédentes.

25. Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 2 % des pièces produites par cette chaîne ne sont pas conformes. Après contrôle, on s'est aperçu que 97% des pièces conformes sont acceptées et 99% des pièces non conformes sont rejetées. Quelle est la probabilité d'avoir une pièce conforme et rejetée ?

a) 0,03 **b)** 0,294 **c)** 0,0294 **d)** Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

26. On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; 16]$ par

$f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x)$.

On note respectivement (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

A et B sont les points d'intersection entre (C_f) et (C_g) sur l'intervalle $]0; 16]$. Soient $\mathcal{A}_1$ l'aire hachurée comprise entre (C_g) et (C_f) sur $[0;\ x_{\mathrm{A}}]$ et $\mathcal{A}_2$ l'aire en pointillés comprise entre (C_g) et (C_f) sur $[x_{\mathrm{A}};\ x_{\mathrm{B}}]$.

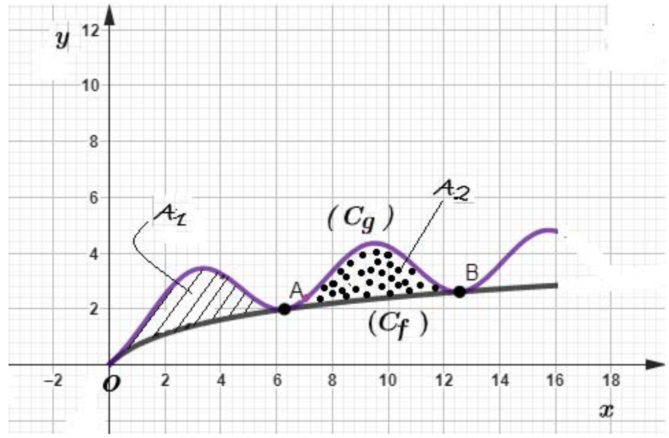
On a:

a) $\mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_2$

b) $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = (2\pi + 1)\ln(2\pi + 1)$

c) $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = 6$

d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.



27. On considère dans l'espace, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes suivantes : (P): $2x + y - z + 1 = 0$ et (Q): $x + 2y + z + 2 = 0$. Alors :

a) Les plans (P) et (Q) sont parallèles.

b) Les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

c) Les plans (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (d) dirigée par le vecteur $\vec{u}(1\,; -1\,; 1)$.

d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

28. Une urne contient trois boules rouges, trois boules noires et quatre boules blanches. On tire trois boules successivement et sans remise. La probabilité que les boules tirées soient toutes de la même couleur est :

a) 0,2 **b)** 0,05 **c)** 0,118 **d)** Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

29. Un agriculteur possède 100 kg de pastèques. Au début, elles sont composées de 99% d'eau et donc 1% de matière sèche. Plus tard, en cours du stockage, leur teneur en eau descend à 98%. Quel est à ce moment le poids total des pastèques ?

a) 98 kg **b)** 99 kg **c)** 50 kg **d)** Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

30. On considère deux carrés directs ABCD et DCEF de côté 1.

Le point I est le milieu de [BC] et le point J est le milieu de [EF] (voir figure).

On appelle s la similitude directe plane qui transforme A en I et C en J.

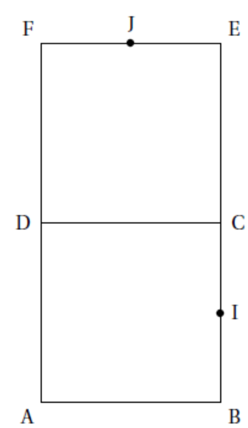
On se place dans le repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$. L'écriture complexe de s est alors donnée par :

a) $z' = \left(1 + \frac{1}{2}i\right)z + \frac{1}{2} + i$

b) $z' = \left(\frac{1}{2} + i\right)z + 1 + \frac{1}{2}i$

c) $z' = \left(\frac{1}{2} - i\right)z + 1 + \frac{1}{2}i$

d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.



Exercice 2 **:** (8 points)

Partie A :

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

4. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et qu'elles sont opposées.

5. On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \ln(7 - e^{-U_n})$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

a) En utilisant une démonstration par récurrence, prouver que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < U_n < U_{n+1} < 2$.

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

6. Montrer que $1{,}92 < \alpha < 1{,}93$.

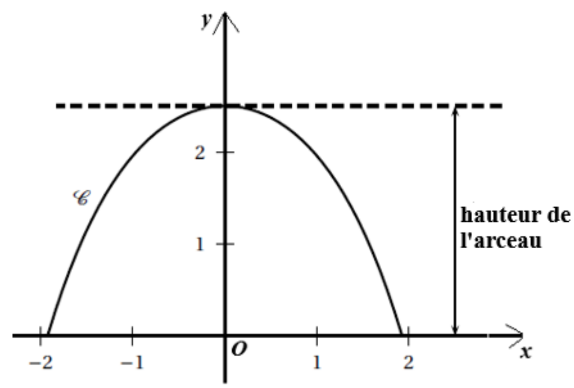
Partie B :

Les serres en forme de tunnel sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles ; elles protègent les plantes contre le froid ou les grandes variations de température.

Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont fixés au sol et qui supportent une bâche en plastique.

Dans un repère orthonormé d'unité 1 mètre, on modélise un arceau de serre par la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f étudiée à la partie A, sur l'intervalle $[-\alpha\,;\,\alpha]$.

On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-\alpha\,;\alpha]$.



1. Calculer la hauteur d'un arceau (voir figure).

2. Dans cette question on se propose de calculer la longueur d'un arceau, c'est-à-dire la longueur de la courbe $\mathscr{C}$.

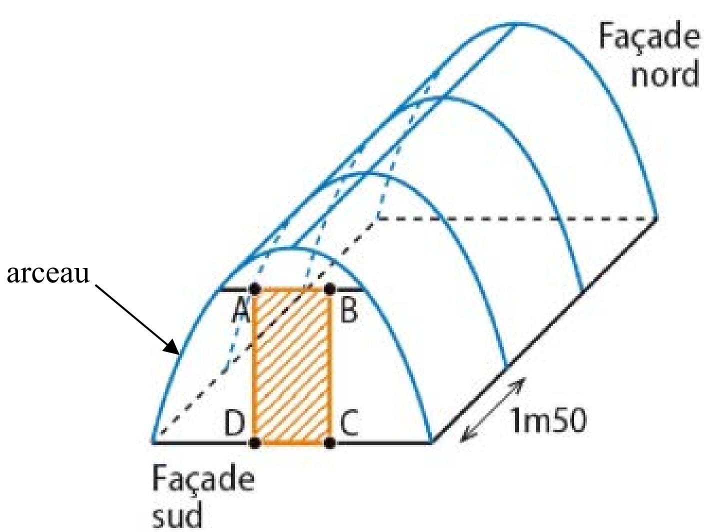
On admet que la longueur de la courbe sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$ est donnée, en mètres, par l'intégrale suivante : $I = \int_0^{\alpha} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

a) Montrer que, pour tout réel x, on a: $1+(f'(x))^2 = \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2$.

b) Calculer I en fonction de α. En déduire que la longueur L d'un arceau, en mètres, est égale à $e^{\alpha} - e^{-\alpha}$.

3. On souhaite construire une serre de jardin en forme de tunnel.

On fixe au sol quatre arceaux métalliques, dont la forme est celle décrite dans la partie précédente, espacés de 1,5 mètre, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



Sur la façade sud, on prévoit une ouverture représentée sur le schéma par le rectangle ABCD de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.
On souhaite connaître la quantité, exprimée en m^2, de bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.
Cette bâche est constituée de trois parties : l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (sauf l'ouverture) et la troisième partie de forme rectangulaire recouvrant le toit de la serre.

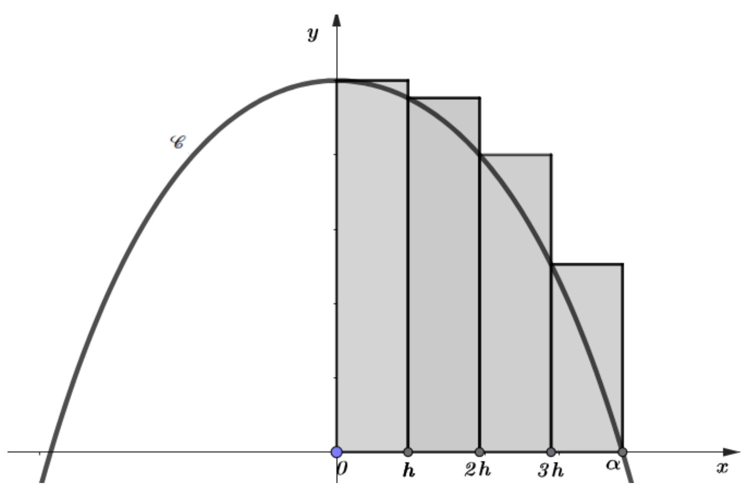
a) Montrer que la quantité Q, en m^2, de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée par :
$$Q = 4\int_0^{\alpha} f(x)dx \ -2$$

b) On prend 1,925 comme valeur approchée de α pour toute la suite du problème.
Déterminer, au m^2 près, l'aire totale $\mathcal{A}$ de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.

4. On se propose dans cette question de retrouver l'approximation de l'aire totale $\mathcal{A}$ de la bâche par une méthode numérique.
Dans un premier temps, nous allons calculer une valeur approchée de l'intégrale $S = \int_0^{\alpha} f(x)dx$ en utilisant la méthode numérique suivante (dite ***méthode des rectangles***) :
On découpe l'intervalle $[0\,;\alpha]$ en n intervalles de même longueur $h = \dfrac{\alpha}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On admet alors qu'une valeur approchée de l'intégrale $S = \int_0^{\alpha} f(x)dx$ est donnée par la somme S_n des aires des n rectangles de base h et de hauteurs $f(kh)$ pour k variant de 0 à $n-1$.

Ainsi $S = \int_0^{\alpha} f(x)dx \approx S_n$ où $S_n = h[f(0) + f(h) + f(2h) + ... + f((n-1)h)] = h\sum_{k=0}^{n-1} f(kh)$

Sur la figure ci-dessous, pour visualiser la situation, on vous a représenté ces rectangles pour $n = 4$. En fait, plus l'entier n est grand, plus la somme S_n des aires des rectangles s'approche de l'intégrale $S = \int_0^{\alpha} f(x)dx$.



On vous donne ci-dessous une table de valeurs de la fonction f où $h = 1{,}925/500$ (ce qui signifie qu'on a pris $n = 500$).

x	0	h	$2h$	$3h$	……..	$499h$	***Total***
$f(x)$	2,5	2,499993	2,499970	2,499933	……..	0,012377	***879,915036***

a) En vous basant sur les valeurs de ce tableau, déduire que $S_{500} = 3{,}387673$.
Que représente ce résultat ?

b) En utilisant ce résultat numérique, retrouver alors l'approximation de l'aire totale $\mathcal{A}$ de la bâche plastique nécessaire pour réaliser la serre.

Concours d’entrée
MATHÉMATIQUES
SUJET A
CORRECTION
(Programme Libanais)

Date : *17/07/2025*

Exercice 1:

Question	Réponse
1	c
2	b
3	b
4	b
5	b
6	c
7	c
8	b
9	b
10	d
11	c
12	c
13	d
14	c
15	c
16	b
17	a
18	b
19	b
20	b
21	c
22	c
23	b
24	d
25	c
26	d
27	c
28	b
29	c
30	b

Exercice 2 :

Partie A :

1. On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}+e^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7}{2}-\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) = -\infty$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. • $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

• Pour tout $x > 0$, on a $x > -x$; donc $e^{x} > e^{-x}$; d'où $f'(x) < 0$.

$\therefore$ La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. Sur $[0\,;\,+\infty[$: La fonction f est continue et strictement décroissante.

De plus $\begin{cases} .\ f(0) = 5/2 \\ .\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

Or $0 \in\,]-\infty\,;\,5/2]$

$\therefore$ D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on remarque que $f(-x) = f(x)$. Donc f est une fonction paire.
Or on a vu qu'il existe $\alpha \in [0\,;+\infty[$ unique tel que $f(\alpha) = 0$.
Et comme $f(-\alpha) = f(\alpha)$, alors $-\alpha \in\,]-\infty\,;0]$ et vérifie $f(-\alpha) = 0$.
S'il y avait une autre solution $\beta \neq -\alpha$ dans $]-\infty\,;\,0[$ alors $-\beta$ serait une deuxième solution dans $]0\,;+\infty[$, ce qui n'est pas possible.

$\therefore$ L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions (opposées) dans $\mathbb{R}$, qui sont α et $-\alpha$.

Autre explication : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on remarque que $f(-x) = f(x)$. Donc f est une fonction paire. Ce qui signifie que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Or , d'après la question 3, on sait que la courbe de f coupe l'axe des abscisses une seule fois sur $[0\,;+\infty[$, au point d'abscisse α. Donc, par symétrie on peut affirmer que la courbe de f coupe l'axe des abscisses exactement deux fois, aux points d'abscisses α et $-\alpha$.

5. a) **Initialisation:**

Pour $n = 0$: On a $U_0 = 1$ et $U_1 = \ln(7 - e^{-U_0}) = \ln(7 - e^{-1}) = 1{,}8919\ldots \quad \Rightarrow \quad 0 < U_0 < U_1 < 2$.
La proposition est donc vérifiée pour $n = 0$. → *la proposition est initialisée au rang 0*

Hérédité:

Soit un entier naturel n tel que $0 < U_n < U_{n+1} < 2$. (HR) : *Hypothèse de récurrence*
Montrons alors que $0 < U_{n+1} < U_{n+2} < 2$.

On a: (HR) $\Rightarrow -2 < -U_{n+1} < -U_n < 0$
$\Rightarrow e^{-2} < e^{-U_{n+1}} < e^{-U_n} < 1$
$\Rightarrow -1 < -e^{-U_n} < -e^{-U_{n+1}} < -e^{-2}$
$\Rightarrow 6 < 7 - e^{-U_n} < 7 - e^{-U_{n+1}} < 7 - e^{-2}$
$\Rightarrow 0 < \ln(6) < \ln(7 - e^{-U_n}) < \ln(7 - e^{-U_{n+1}}) < \ln(7 - e^{-2}) = 1{,}926\ldots < 2$

D'où $0 < U_{n+1} < U_{n+2} < 2$. → *la proposition est donc héréditaire*

$\therefore$ En conclusion, la proposition est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (principe de récurrence).

Autre méthode : Comme $U_{n+1} = g(U_n)$ avec $g(x) = ln(7 - e^{-x})$, on peut aussi utiliser le fait que la fonction g est strictement croissante sur [0 ; 2] pour démontrer l'hérédité.

b) • D'après la double inégalité obtenue à la question précédente, on déduit que la suite (U_n) est croissante et majorée par 2. Donc elle converge d'après le théorème de convergence monotone.

- Soit $L = \lim_{n\to+\infty} U_n$ (on a $0 < L \leq 2$).

On a : $L = \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \ln(7 - e^{-U_n}) = \ln(7 - e^{-L})$

$\Longrightarrow$ $L = \ln(7 - e^{-L})$
$\Longrightarrow$ $e^L = 7 - e^{-L}$
$\Longrightarrow$ $7 = e^L + e^{-L}$
$\Longrightarrow$ $\frac{7}{2} = \frac{1}{2}(e^L + e^{-L})$
$\Longrightarrow$ $f(L) = 0$
$\Longrightarrow$ $L = \alpha$ (car $L > 0$)
$\therefore$ La suite (U_n) converge vers α.

6. On a : $\begin{cases} f(1{,}92) = 0{,}0162\ldots > 0 \\ f(1{,}93) = -0{,}017\ldots < 0 \end{cases} \Longrightarrow 1{,}92 < \alpha < 1{,}93$

Partie B :

1. La hauteur d'un arceau est égale à : $f(0) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^0 + e^0) = \frac{5}{2} = 2{,}5$ m.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}[4 + (e^x - e^{-x})^2] = \frac{1}{4}[\,2 + e^{2x} + e^{-2x}] = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$

b) - $I = \int_0^\alpha \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_0^\alpha \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_0^\alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$

- Puisque la fonction f est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc la longueur de la courbe (donc de l'arceau) est : $L = 2I = e^\alpha - e^{-\alpha}$.

3. a) Les façades Nord et Sud ont chacune une aire égale à $\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx = 2\int_0^\alpha f(x)dx$. L'aire de l'ouverture vaut 2.

Donc la quantité Q de bâche nécessaire pour recouvrir les façades Sud et Nord est donnée, en m^2, par :

$Q =$ aire de la façade Sud $+$ aire de la façade Nord $-$ aire de l'ouverture

$= 2\int_0^\alpha f(x)dx + 2\int_0^\alpha f(x)dx - 2 = 4\int_0^\alpha f(x)dx - 2$

b) L'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour recouvrir toute la serre est donnée par :

$\mathcal{A} = Q +$ aire de la bâche latérale recouvrant le toit .

- $Q = 4\int_0^\alpha f(x)dx - 2 = 4\int_0^\alpha \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\right)dx - 2 = \int_0^\alpha \left(14 - 2\left(e^x + e^{-x}\right)\right)dx - 2 = 14\alpha - 2(e^\alpha - e^{-\alpha}) - 2$

- L'aire de la bâche latérale est celle d'un rectangle de longueur $3 \times 1{,}5 = 4{,}5$ m et de largeur $L = 2I = e^\alpha - e^{-\alpha}$.

  Cette aire vaut donc $4{,}5 \times \left(e^\alpha - e^{-\alpha}\right)$.

$\therefore$ L'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour recouvrir toute la serre est donc:

$\mathcal{A} = Q + 4{,}5 \times \left(e^\alpha - e^{-\alpha}\right) = 14\alpha - 2(e^\alpha - e^{-\alpha}) - 2 + 4{,}5 \times \left(e^\alpha - e^{-\alpha}\right) = \boxed{14\alpha + 2{,}5(e^\alpha - e^{-\alpha}) - 2} \approx 41{,}72 \approx 42\ \text{m}^2$

4. a) $S_{500} = h\sum_{k=0}^{500-1} f(kh) = \frac{1{,}925}{500} \times 879{,}915036 = 3{,}387673$.

Cette valeur est une approximation de l'intégrale $S = \int_0^\alpha f(x)dx$.

b) On a $\mathcal{A} = Q + 4{,}5 \times \left(e^\alpha - e^{-\alpha}\right)$

$= 4\int_0^\alpha f(x)dx - 2 + 4{,}5 \times \left(e^\alpha - e^{-\alpha}\right)$

$= 4S - 2 + 4{,}5 \times (e^\alpha - e^{-\alpha})$

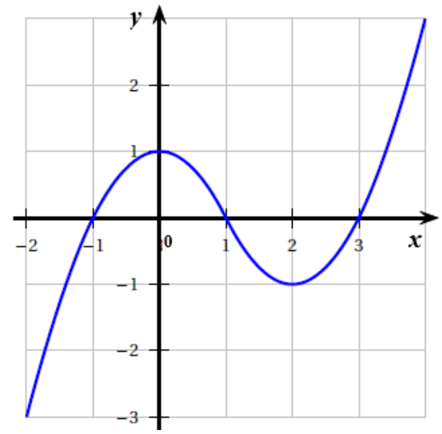
$\approx 4 \times 3{,}387673 - 2 + 4{,}5(e^{1{,}925} - e^{-1{,}925}) \approx 41{,}74 \approx 42\ \text{m}^2$

Les smartphones, les documents et les calculatrices graphiques sont strictement interdits.

Exercice 1 : (12 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, ***une seule*** *des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Répondre sur la feuille de réponses, en entourant pour chacune des questions* ***une seule*** *des réponses a, b, c ou d.*

Aucune justification n'est demandée.



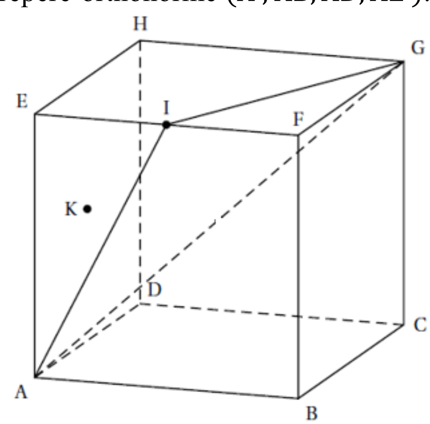
1. On vous donne ci-contre la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.
Par lecture graphique de la courbe de f', déterminer l'affirmation correcte pour f :

a) f est décroissante sur $[0\ ;2]$.
b) f est décroissante sur $[-1\ ;0]$.
c) f admet un maximum en 1 sur $[0\ ;2]$.
d) f admet un maximum en 3 sur $[2\ ;4]$.

2. On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{3-U_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{U_n} - \frac{1}{2}$ est :

a) arithmétique. **b)** géométrique. **c)** constante. **d)** Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

3. On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. L'espace est muni du repère orthonormé $(A\ ;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. Le point I est le milieu du segment [EF] et K est le centre du carré ADHE.



a) L'angle $\widehat{AIG}$ vaut 90° .
b) Le vecteur $\overrightarrow{BK}$ est normal au plan (AIG).
c) La droite (BK) coupe le plan (AIG) au point $L(\frac{1}{3};\ 0;\ \frac{1}{3})$.
d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

4. Un questionnaire à choix multiple comporte 28 questions indépendantes. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte. Si un élève répond **au hasard** à toutes les questions, quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à 14 questions exactement ?

a) 12,5% **b)** 50% **c)** environ 0,27% **d)** Aucune des réponses précédentes.

5. Si $3x - y = 16$ alors $\sqrt{\frac{8^{x-1}}{2^{y+1}}} =$

a) 3^3 **b)** 2^6 **c)** 2^{10} **d)** Aucune des réponses précédentes.

6. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2+(a+1)x+1}{2x^2+x-1} & si \;\; x \neq -1 \\ \frac{1}{3} & si \;\; x = -1 \end{cases}$ où a est une constante réelle.

a) La fonction f est continue en -1 si $a = -1$.
b) La fonction f est continue en -1 si $a = \frac{1}{3}$.
c) La fonction f est continue en -1 si $a = 2$.
d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

7. Considérons la fonction définie par $f(x) = x^{1000} + x$.
a) La fonction f est concave.
b) La courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse 0.
c) La courbe de f n'admet pas de point d'inflexion.
d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

8. On considère la fonction **rang**( ) suivante, écrite en langage Python.

```
def rang(seuil):
  n=0
  u=400
  while u<=seuil:
     n=n+1
     u=600-200*0.9**n
  return (n)
```

a) **rang**(500) renvoie la valeur 6.57
b) **rang**(500) renvoie la valeur 6
c) **rang**(500) renvoie la valeur 7
d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

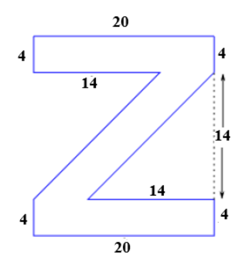
9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2\left(\frac{1+\ln(x)}{x}\right)$.
Dans une entreprise, on a modélisé par la fonction f sur l'intervalle $[0{,}2 \; ; \; +\infty[$ le bénéfice mensuel (éventuellement négatif), en milliers d'euros, réalisé en vendant x milliers d'objets fabriqués. Alors :
a) Le bénéfice mensuel de l'entreprise peut dépasser 2100 euros.
b) Le bénéfice mensuel maximal de l'entreprise vaut 2000 euros.
c) L'entreprise réalisera une perte si elle vend plus de 1000 pièces.
d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

10. Considérons l'équation $3\ln(x+1) - 2\ln(x) = \ln(x+7)$, d'inconnue réelle x.
L'ensemble S des solutions de cette équation est :
a) $S = \{\frac{1}{4} \; ; -1\}$
b) $S = \{-\frac{1}{4} \; ; 1\}$
c) $S = \{\frac{1}{4} \; ; 1\}$
d) $S = \{1\}$

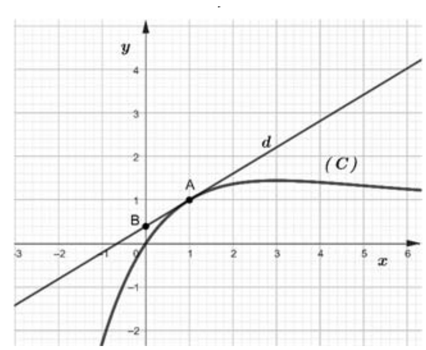
11. Une machine industrielle perd 5% de sa valeur chaque année en raison de l'usure. La valeur initiale de la machine est de 10000 euros. Après combien d'années la machine aura-t-elle perdu 50% de sa valeur ?
a) 10 ans.
b) 7 ans.
c) 14 ans.
d) Aucune des réponses précédentes.

12. La solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = -2$ telle que $f(1) = 0$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
a) $f(x) = e^{-2x} - e^{-2}$
b) $f(x) = -x^2 - 2x + 4$
c) $f(x) = e^{2-2x} - 1$
d) Aucune des réponses précédentes.

13. Quelle est l'aire de cette figure en forme de Z ?
a) 168
b) 220
c) 240
d) 244



14. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{-kx} + 1$
où k est une constante réelle.
La représentation graphique *(C)* de f est donnée ci-contre,
dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. La tangente d à la courbe *(C)* au point A d'abscisse 1 passe par le point $B(0 \; ; 1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$. Alors :
a) $k = 1$.
b) $k = -1$.
c) $k = \frac{1}{2}$.
d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.



15. L'ensemble des solutions de l'inéquation $2\cos(x) - \sqrt{3} \geq 0$ sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ est :

a) $[\frac{\pi}{6}\,;\,2\pi]$ **b)** $[-\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{6}]$ **c)** $\left[0\,;\,\frac{\pi}{6}\right] \cup [\frac{11\pi}{6}; 2\pi]$ **d)** Aucune des réponses précédentes.

16. Pour maintenir en bon état de fonctionnement son parc automobile, une très grande entreprise de transport décide faire contrôler les véhicules de son parc automobile.
On sait que 20% des véhicules sont sous garantie. Parmi les véhicules sous garantie on a 1% de véhicules défectueux et parmi les véhicules qui ne sont plus sous garantie on a 10 % de véhicules défectueux.
On choisit un véhicule au hasard dans le parc. La probabilité que le véhicule soit défectueux est égale à :

a) 11 % **b)** 8,2 % **c)** 0,082 % **d)** Aucune des réponses précédentes.

17. La limite, quand n tend vers $+\infty$, de la suite numérique (U_n) définie par $U_n = n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$ vaut :

a) 1 **b)** $-\infty$ **c)** $+\infty$ **d)** 0

18. On lance deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité que la somme des chiffres obtenus soit supérieure ou égale à 11 ?

a) $\frac{1}{36}$ **b)** $\frac{1}{12}$ **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** Aucune des réponses précédentes.

19. On considère l'équation différentielle (E) suivante : $y' + y = 2\sin(x)$.
Soit f l'unique solution de (E) telle que $f(0) = 2$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation :

a) $x = y - 2$ **b)** $y = -2x + 2$ **c)** $y = 2$ **d)** Aucune des réponses précédentes.

20. (U_n) est une suite géométrique telle que $U_0 = 2$ et $U_3 = \frac{128}{125}$.
Alors la suite (S_n) définie par $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ tend vers :

a) 0 **b)** 10 **c)** $+\infty$ **d)** Aucune des réponses précédentes.

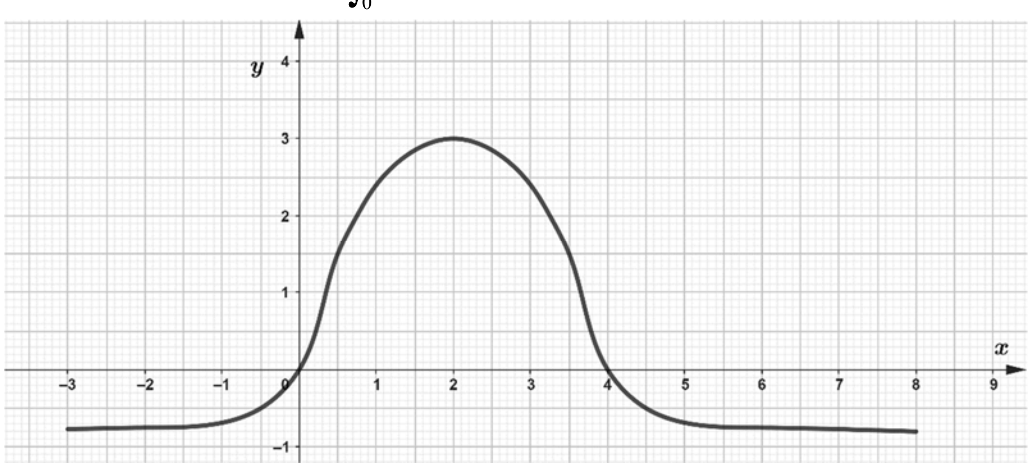
21. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln^2(1+\sqrt{x}) + e^{2x} - 1}{x} =$

a) $+\infty$ **b)** 0 **c)** 3 **d)** Aucune des réponses précédentes.

22. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance 2 et de variances respectives 4 et 9.
L'écart-type de la variable $Z = 3X - Y$ est :

a) 4 **b)** 3 **c)** $3\sqrt{5}$ **d)** Aucune des réponses précédentes.

23. On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $I = [-3\,;\,8]$.
On définit la fonction F sur I par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.



a) $0 \leq F(4) \leq 4$ **b)** $6 \leq F(4) \leq 12$ **c)** $-1 \leq F(4) \leq 4$ **d)** Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

24. Que va afficher le programme ci-contre écrit en langage Python ?

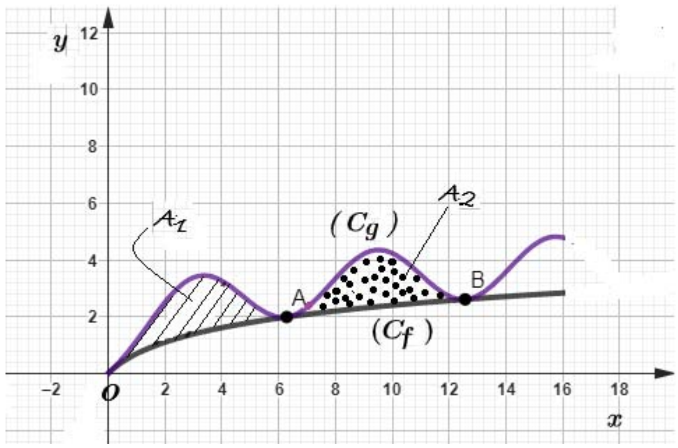
```
def  mystere():
    s = 0
    for i in range (51):
        s = s + i
    print(s)
```

a) 51 **b)** 1326 **c)** 1275 **d)** Aucune des réponses précédentes.

25. Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 2 % des pièces produites par cette chaîne ne sont pas conformes. Après contrôle, on s'est aperçu que 97% des pièces conformes sont acceptées et 99% des pièces non conformes sont rejetées. Quelle est la probabilité d'avoir une pièce conforme et rejetée ?

a) 0,03 **b)** 0,294 **c)** 0,0294 **d)** Aucune des réponses précédentes.

26. On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; 16]$ par
$f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x)$.
On note respectivement (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.



A et B sont les points d'intersection entre (C_f) et (C_g) sur l'intervalle $]0; 16]$. Soient $\mathcal{A}_1$ l'aire hachurée comprise entre (C_g) et (C_f) sur $[0;\ x_{\mathrm{A}}]$ et $\mathcal{A}_2$ l'aire en pointillés comprise entre (C_g) et (C_f) sur $[x_{\mathrm{A}};\ x_{\mathrm{B}}]$.
Alors on a:

a) $\mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_2$

b) $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = (2\pi + 1)\ln(2\pi + 1)$

c) $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = 6$

d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

27. On considère dans l'espace, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes suivantes : (P): $2x + y - z + 1 = 0$ et (Q): $x + 2y + z + 2 = 0$. Alors :

a) Les plans (P) et (Q) sont parallèles.

b) Les plans (P) et (Q) sont orthogonaux.

c) Les plans (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (d) dirigée par le vecteur $\vec{u}(1\,;-1\,;1)$.

d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

28. Une urne contient trois boules rouges, trois boules noires et quatre boules blanches. On tire trois boules successivement et sans remise. La probabilité que les boules tirées soient toutes de la même couleur est :

a) 0,2. **b)** 0,05 **c)** 0,118. **d)** Aucune des réponses précédentes.

29. Pour tout réel x, $\cos(\pi - x) - \cos(3\pi + x) + 2\cos(-x) - \cos(2026\pi + x) + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) =$

a) $\cos(x)$ **b)** $\sin(x)$ **c)** 0 **d)** $-\cos(x)$

30. Un agriculteur possède 100 kg de pastèques. Au début, elles sont composées de 99% d'eau et donc 1% de matière sèche. Plus tard, en cours du stockage, leur teneur en eau descend à 98%. Quel est à ce moment le poids total des pastèques ?

a) 98 kg **b)** 99 kg **c)** 50 kg **d)** Aucune des réponses précédentes.

***Exercice 2* :** (8 points)

Partie A :

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

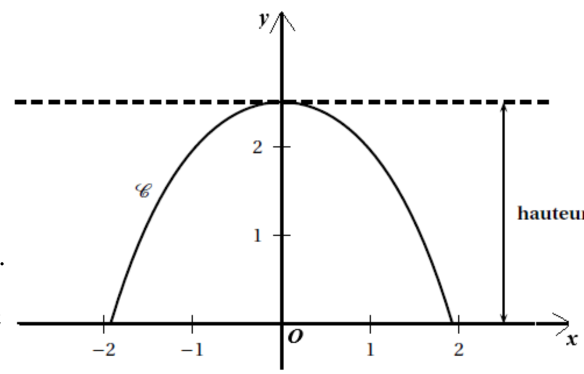
1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
4. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et qu'elles sont opposées.
5. On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \ln(7 - e^{-U_n})$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
  a) En utilisant une démonstration par récurrence, prouver que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < U_n < U_{n+1} < 2$.
  b) En déduire que la suite (U_n) est convergente. Quelle est sa limite ?
6. On vous donne, dans le tableau suivant, les premiers termes de la suite (U_n), arrondis à 4 chiffres après la virgule.

n	0	1	2	3	4	5
U_n	1	1,8919	1,9241	1,9248	1,9248	1,9248

En vous basant sur les valeurs de ce tableau, déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

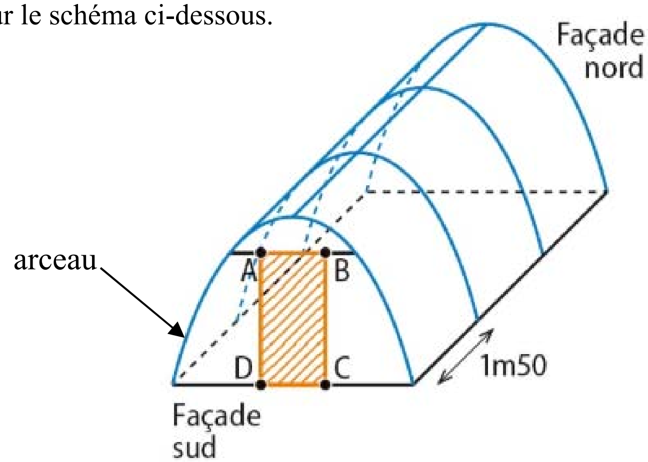
Partie B :

Les **serres en forme de tunnel** sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles ; elles protègent les plantes contre le froid ou les grandes variations de température.
Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique.
Dans un repère orthonormé d'unité 1 mètre, on modélise un arceau de serre par la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f étudiée à la partie A, sur l'intervalle $[-\alpha\,;\,\alpha]$.
On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-\alpha\,;\alpha]$.



1. Calculer la hauteur d'un arceau.
2. Dans cette question on se propose de calculer la longueur d'un arceau, c'est-à-dire la longueur de la courbe $\mathscr{C}$.
On admet que la longueur de la courbe sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$ est donnée, en mètres, par l'intégrale suivante : $I = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.
  a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2$
  b) Calculer I en fonction de α. En déduire que la longueur L d'un arceau, en mètres, est égale à $e^{\alpha} - e^{-\alpha}$.

3. On souhaite construire une serre de jardin en forme de tunnel.
On fixe au sol quatre arceaux métalliques, dont la forme est celle décrite dans la partie précédente, espacés de 1,5 mètre, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



Sur la façade sud, on prévoit une ouverture représentée sur le schéma par le rectangle ABCD de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.
On souhaite connaître la quantité, exprimée en m^2, de bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.
Cette bâche est constituée de trois parties : l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (sauf l'ouverture) et la troisième partie de forme rectangulaire recouvrant le toit de la serre.

a) Montrer que la quantité Q, en m^2, de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée par :

$$Q = 4\int_0^{\alpha} f(x)dx \; -2$$

b) On prend 1,925 comme valeur approchée de α pour toute la suite du problème.
Déterminer, au m^2 près, l'aire totale $\mathcal{A}$ de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.

4. On se propose dans cette question de retrouver l'approximation de l'aire totale $\mathcal{A}$ de la bâche par une méthode numérique.
Dans un premier temps, nous allons calculer une valeur approchée de l'intégrale $S = \int_0^{\alpha} f(x)dx$ en utilisant la méthode numérique suivante (dite **méthode des rectangles**) :
On découpe l'intervalle $[0\,;\alpha]$ en n intervalles de même longueur $h = \dfrac{\alpha}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On admet alors qu'une valeur approchée de l'intégrale $S = \int_0^{\alpha} f(x)dx$ est donnée par la somme S_n des aires des n rectangles de base h et de hauteurs $f(kh)$ pour k variant de 0 à $n-1$.

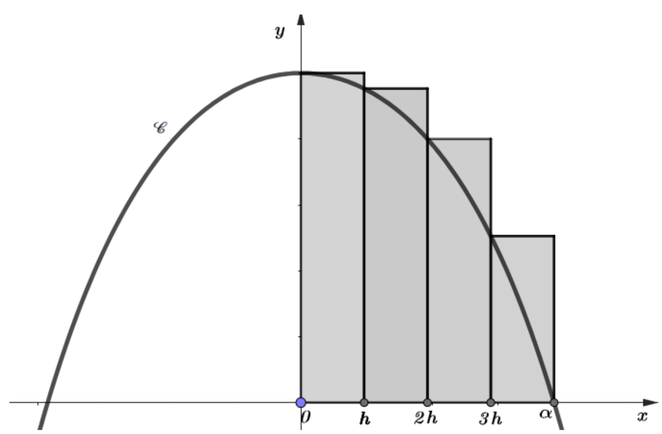
Ainsi $S = \int_0^{\alpha} f(x)dx \approx S_n$ où $S_n = h[f(0)+f(h)+f(2h)+\ldots+f((n-1)h)] = h\sum_{k=0}^{n-1} f(kh)$

Sur la figure ci-dessous, pour visualiser la situation, on vous a représenté ces rectangles pour $n = 4$. En fait, plus l'entier n est grand, plus la somme S_n des aires des rectangles s'approche de l'intégrale $S = \int_0^{\alpha} f(x)dx$.
Considérons alors le programme suivant écrit en Python.

```python
from math import *

def f(x):
    return 7/2-1/2*(exp(x) + exp(-x))

def somme(n):
    s = 0
    h = 1.925/n
    for k in range (0,n):
        s = ... ......
    return ...
```



a) Recopier et compléter la fonction **somme ( )** qui reçoit en entrée le nombre n de rectangles et qui retourne la valeur de S_n.

b) L'exécution du programme donne la sortie suivante :

```
>>> somme(500)
3.3876728878115454
>>>
```

Que représente ce résultat ?

c) En utilisant le résultat donné par le programme, retrouver alors l'approximation de l'aire totale $\mathcal{A}$ de la bâche plastique nécessaire pour réaliser la serre.

Concours d'entrée
MATHÉMATIQUES
CORRECTION
(Programme Français)

Date : *17/07/2025*

Exercice 1:

Question	Réponse
1	c
2	b
3	b
4	c
5	b
6	c
7	c
8	c
9	b
10	d
11	c
12	c
13	d
14	c
15	c
16	b
17	a
18	b
19	b
20	b
21	c
22	c
23	b
24	c
25	c
26	d
27	c
28	b
29	c
30	c

Exercice 2 :

Partie A :

1. On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}+e^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7}{2}-\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) = -\infty$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. • $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

• Pour tout $x > 0$, on a $x > -x$; donc $e^{x} > e^{-x}$; d'où $f'(x) < 0$.

$\therefore$ La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. Sur $[0\ ;\ +\infty[$: La fonction f est continue et strictement décroissante.

De plus $\begin{cases} .\ f(0) = 5/2 \\ .\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

Or $0 \in]-\infty\ ;\ 5/2]$

$\therefore$ D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on remarque que $f(-x) = f(x)$. Donc f est une fonction paire.
On a vu qu'il existe $\alpha \in [0\ ; +\infty[$ unique tel que $f(\alpha) = 0$.
Or $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$. Donc $-\alpha \in]-\infty\ ; 0]$ et vérifie $f(-\alpha) = 0$.
S'il y avait une autre solution $\beta \neq -\alpha$ dans $]-\infty\ ;\ 0[$ alors $-\beta$ serait une deuxième solution dans $]0\ ; +\infty[$, ce qui n'est pas possible.

$\therefore$ L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions opposées dans $\mathbb{R}$, qui sont α et $-\alpha$.

<u>Autre explication</u> : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on remarque que $f(-x) = f(x)$. Donc f est une fonction paire. Ce qui signifie que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Or , d'après la question 3, on sait que la courbe de f coupe l'axe des abscisses une seule fois sur $[0\ ; +\infty[$, au point d'abscisse α. Donc, par symétrie on peut affirmer que la courbe de f coupe l'axe des abscisses exactement deux fois, aux points d'abscisses α et $-\alpha$.

5. a) <u>Initialisation:</u>

Pour $n = 0$: On a $U_0 = 1$ et $U_1 = \ln(7 - e^{-U_0}) = \ln(7 - e^{-1}) = 1{,}8919\ ...$ $\Rightarrow$ $0 < U_0 < U_1 < 2$.
La proposition est donc vérifiée pour $n = 0$. → *la proposition est initialisée au rang 0*

<u>Hérédité:</u>

Soit un entier naturel n tel que $0 < U_n < U_{n+1} < 2$. (HR) : *Hypothèse de récurrence*
Montrons alors que $0 < U_{n+1} < U_{n+2} < 2$.

On a: (HR) $\Rightarrow -2 < -U_{n+1} < -U_n < 0$

$\Rightarrow e^{-2} < e^{-U_{n+1}} < e^{-U_n} < 1$

$\Rightarrow -1 < -e^{-U_n} < -e^{-U_{n+1}} < -e^{-2}$

$\Rightarrow 6 < 7 - e^{-U_n} < 7 - e^{-U_{n+1}} < 7 - e^{-2}$

$\Rightarrow 0 < \ln(6) < \ln(7 - e^{-U_n}) < \ln(7 - e^{-U_{n+1}}) < \ln(7 - e^{-2}) = 1{,}926\ ... < 2$

D'où $0 < U_{n+1} < U_{n+2} < 2$. → *la proposition est donc héréditaire*

$\therefore$ En conclusion, la proposition est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (principe de récurrence).

<u>Autre méthode</u> : Comme $U_{n+1} = g(U_n)$ avec $g(x) = ln(7 - e^{-x})$, on peut aussi utiliser le fait que la fonction g est strictement croissante sur [0 ; 2] pour démontrer l'hérédité.

b) • D'après la double inégalité obtenue à la question précédente, on déduit que la suite (U_n) est croissante et majorée par 2. Donc elle converge d'après le théorème de convergence monotone.

- Soit $L = \lim_{n\to+\infty} U_n$ (on a $0 < L \leq 2$). On a : $L = \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \ln(7-e^{-U_n}) = \ln(7-e^{-L})$

$\Longrightarrow \ L = \ln(7-e^{-L}) \ \Longrightarrow \ e^L = 7 - e^{-L} \ \Longrightarrow \ 7 = e^L + e^{-L} \ \Longrightarrow \ \frac{7}{2} = \frac{1}{2}(e^L + e^{-L}) \ \Longrightarrow \ f(L) = 0$

Donc $L = \alpha$ (car $L > 0$)

$\therefore$ La suite (U_n) converge vers α.

6. D'après le tableau on voit que la suite converge vers 1,9248…qui n'est autre que α.

$\therefore$ Donc on peut affirmer que $\alpha = 1{,}9248$ .... C'est-à-dire $\alpha \approx 1{,}925$ à 10^{-3} près.

Partie B :

1. La hauteur d'un arceau est égale à : $f(0) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^0 + e^0) = \frac{5}{2} = 2{,}5$ m.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}, \ 1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}[4 + (e^x - e^{-x})^2] = \frac{1}{4}[2 + e^{2x} + e^{-2x}] = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$

b) • $I = \int_0^\alpha \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_0^\alpha \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_0^\alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$

• Puisque la fonction f est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc la longueur de la courbe (donc de l'arceau) est : $L = 2I = e^\alpha - e^{-\alpha}$.

3. a) Les façades Nord et Sud ont chacune une aire égale à $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_0^\alpha f(x)dx$. L'aire de l'ouverture vaut 2.

Donc la quantité Q de bâche nécessaire pour recouvrir les façades Sud et Nord est donnée, en m², par :

$Q =$ aire de la façade Sud $+$ aire de la façade Nord $-$ aire de l'ouverture

$= 2\int_0^\alpha f(x)dx + 2\int_0^\alpha f(x)dx - 2 = 4\int_0^\alpha f(x)dx - 2$

b) L'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour recouvrir toute la serre est donnée par :

$\mathcal{A} = Q +$ aire de la bâche latérale recouvrant le toit .

• $Q = 4\int_0^\alpha f(x)dx - 2 = 4\int_0^\alpha \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\right)dx - 2 = \int_0^\alpha \left(14 - 2\left(e^x + e^{-x}\right)\right)dx - 2 = 14\alpha - 2(e^\alpha - e^{-\alpha}) - 2$

• L'aire de la bâche latérale est celle d'un rectangle de longueur $3 \times 1{,}5 = 4{,}5$ m et de largeur $L = 2I = e^\alpha - e^{-\alpha}$.

Cette aire vaut donc $4{,}5 \times \left(e^\alpha - e^{-\alpha}\right)$.

$\therefore$ L'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour recouvrir toute la serre est donc:

$\mathcal{A} = Q + 4{,}5 \times \left(e^\alpha - e^{-\alpha}\right) = 14\alpha - 2(e^\alpha - e^{-\alpha}) - 2 + 4{,}5 \times \left(e^\alpha - e^{-\alpha}\right) = \boxed{14\alpha + 2{,}5(e^\alpha - e^{-\alpha}) - 2} \approx 41{,}72 \approx 42 \text{ m}^2$

4. a)

```
def somme (n):
    s = 0
    h = 1.925/n
    for k in range (0, n):
        s = s + h*f(k*h)
    return s
```

b) Le résultat 3.3876728…retourné par **somme**(500) est la valeur de $S_{500} = h\sum_{k=0}^{500-1} f(kh)$. Cette valeur est une approximation de l'intégrale $S = \int_0^\alpha f(x)dx$.

c) On a $\mathcal{A} = Q + 4{,}5 \times \left(e^\alpha - e^{-\alpha}\right)$

$= 4\int_0^\alpha f(x)dx - 2 + 4{,}5 \times \left(e^\alpha - e^{-\alpha}\right)$

$= 4S - 2 + 4{,}5 \times (e^\alpha - e^{-\alpha}) \approx 4 \times 3{,}387673 - 2 + 4{,}5(e^{1{,}925} - e^{-1{,}925}) \approx 41{,}74 \approx 42 \text{ m}^2$