UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2004-2005 **Composition de Mathématiques** **Le 17/07/2004**
Durée : 3 heures

La distribution des notes est sur 25

I- (4.5 points) Le plan étant rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$, on considère les points A (m, 0) et B (0, n) où m et n sont deux nombres réels. Soit P le point tel que $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{BP}$.

1) Déterminer les coordonnées (x, y) de P en fonction de m et n.
2) On suppose que m et n varient tels que $AB = 2$.
 a- Démontrer que l'ensemble des points P est une ellipse (E) d'équation $4x^2 + y^2 = 4$
 b- Déterminer l'axe focal, les sommets, les foyers et les directrices de (E). Construire (E).

3) Soit (C) la courbe d'équation $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$
 a- Démontrer que (C) est le transformé de (E) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$
 b- Déduire que (C) est un conique dont on déterminera la nature.
 c- Déterminer l'axe focal et un foyer de (C). Calculer l'excentricité et l'aire de (C).

II- (3.5 points) On dispose de n urnes U_1 , U_2 ,….., U_n où n est un entier $n \geq 2$. L'urne U_1 contient 2 boules noires et 1 boule rouge et chacune des autres urnes contient 1 boule noire et 1 boule rouge. On tire au hasard une boule de U_1 et on la remet dans U_2, puis on tire une boule de U_2 et on la remet dans U_3 et on tire une boule de U_3 et ainsi de suite. On désigne par E_k l'évènement : *la boule tirée de U_k est rouge*, et par $\overline{E_k}$ l'évènement contraire et on note p_k la probabilité de E_k : $p_k = p\,(E_k)$

1) Déterminer $p\,(E_1)$, $p\,(E_2/\,pE_1)$ et $p\,(E_2/\,p\overline{E_1})$ et démontrer que $p_2 = \frac{4}{9}$.
2) Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, $on\ a\ p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$
3) On considère la suite (V_k) définie par $V_k = p_k - \frac{1}{2}$ $avec\ k \geq 1$.
 a- Calculer V_1 et démontrer que (V_k) est une suite géométrique.
 b- Calculer p_k en fonction de k. Démontrer que la suite (p_k) est convergente et calculer sa limite.

III- (8 points) Les parties A, B et C du problème sont indépendantes.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$, on considère la transformation T qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = a\,z + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $a \neq b$.

A- Dans cette partie, on suppose $a = \dfrac{3}{4}$ et $b = \dfrac{1}{4}$

1) Donner la nature de T ainsi que ses éléments caractéristiques.
2) Donner la nature de T^{-1} ainsi que ses éléments caractéristiques.

B- Dans cette partie, on suppose que $a = 1 + i$ et $b = -i$

1) Déterminer la nature de T ainsi que ses éléments caractéristiques. Soit w son point double.
2) On considère la suite de points M_n définie par M_0 (un point de l'axe des abscisses d'affixe z_0) et $M_n=T(M_{n-1})$ et la suite de leurs affixes respectives z_n définie par $z_0 = x_0 > 1$ et $z_n = (1+i)\, z_{n-1} - i$.
On pose $W_n = z_n - 1$.

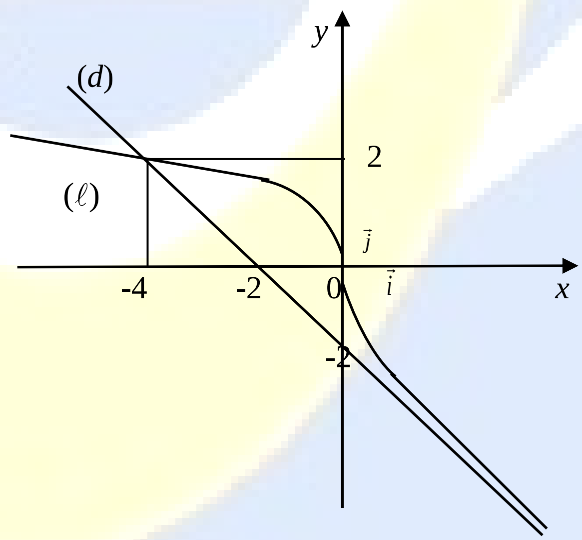
a- Démontrer que la suite de terme général W_n est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
b- Calculer W_n en fonction de x_0 et n .
c- Calculer le module et un argument de W_n .
d- Déterminer les valeurs de l'entier n pour lesquelles M_n d'affixe z_n est un point de l'axe des abscisses.
e- Déterminer x_0 pour que le point M_4 soit confondu avec l'origine O du repère.
f- Placer alors les points M_0 , M_1 , M_2 , M_3 , et M_4.

C- Dans cette partie, on considère la transformation T d'expression complexe $z' = a\,z + b$ et la transformation S d'expression complexe $z' = b\,z + a$ telles que $T \circ S = S \circ T$.

1) Démontrer que a et b sont racines de l'équation $z^2 - z + m = 0$ où m est un nombre à déterminer.
2) Démontrer alors que T, S et $S \circ T$ ont le même point double qui est un point fixe.

IV-(9 points) Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$

A- On désigne par h une fonction définie sur R dont la courbe représentative (ℓ) est donnée ci-contre : (ℓ) est tangente en O à $y'Oy$ et admet (d) comme asymptote à $+\infty$ et l'axe $x'Ox$ comme direction asymptotique.



1) Démontrer que h admet sur R une fonction réciproque g telle que $g(0) = 0$.
2) Soit (γ) la courbe représentative de g .
   a- Déterminer la tangente à (γ) au point O et déduire $g'(0)$.
   b- Démontrer que (d) est asymptote à (γ) et déterminer le point d'intersection de (γ) et (d).
   c- Tracer (γ) dans un autre repère.
   d- Montrer que $g(x)$ et x sont de signes opposés.

3) On suppose que g est définie sur R par $g(x) = (ax + b)(1 + e^x) + c$, où a , b et c sont trois nombres réels.

a- Calculer $g'(x)$.

b- En utilisant les valeurs $g(0)$, $g'(0)$ et $g(2)$ trouvées ci-dessus, calculer a, b et c et vérifier que $g(x) = (2 - x)\, e^x - x - 2$

B- On considère l'équation différentielle (E) : $(1 + e^x)\, y' - y = 0$.

1) En constatant que $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$

2) Résoudre l´équation différentielle (E). Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point I (0 ; 2).

C- On désigne par f la fonction définie sur R par $f(x) = \dfrac{4e^x}{1+e^x}$, et par (C) sa courbe représentative.

1) Etudier les variations de f . Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on déterminer le domaine de définition et calculer $f^{-1}(x)$.

2) Montrer que le point I (0 ; 2) est une centre de symétrie de (C) et déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point I .

3) En utilisant la fonction g trouvée dans la partie A , étudier la position relative de (C) et (T) .

4) Tracer (C) et (T) .

D- On définit sur $\boldsymbol{R}$, la fonction F par $F = g \circ f$.

1) Montrer que F est décroissant.

2) Calculer $F(0)$ et la limite de F à $-\infty$.

Concours d'entrée 2004-2005 **Solution de Mathématiques** **Le 17/07/2004**
Durée : 3 heures

La distribution des notes est sur 25

I- On a $A\ (m\ ,0)$, $B\ (n\ ,0)$, $P(x;\ y)$ *et* $\vec{OA} = 2\,\vec{BP}$

D'ou: $2((x_p - x_B) = x_A$ *et* $2(y_p - y_B) = y_A$ ce qui donne $x = \dfrac{m}{2}$ *et* $y = n$

2) a- On a $AB^2 = 4$; *d'ou* $m^2 + n^2 = 4$ et par suite $(2x)^2 + (y)^2 = 4$

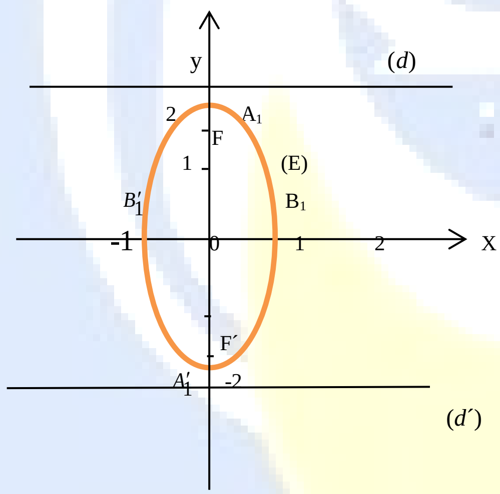
Donc l'ensemble des points P est une ellipse (E) d'équation $4\,x^2 + y^2 = 4$.

b- l'équation $4\,x^2 + y^2 = 4$ s'écrit : $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

L'axe focal est $(y'\ y)$, les sommets de l'axe focal sont $A_1(0;\ 2)$, A_1' $(0;\ -2)$, les sommets de l'axe non focal sont $B_1(1;\ 0)$ and $B_1'(-1;\ 0)$

$c^2 = a^2 - b^2 = 3$, les foyers sont $F\ (0,\ \sqrt{3})$ et $F'\ (0,\ -\sqrt{3})$, les directrices sont les droites d'équations :

$y_1 = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ et $y_2 = -\dfrac{a^2}{c} = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$



3) a- La forme complexe de r est $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z$ ce qui donne $z = e^{-i\frac{\pi}{4}}z'$;

Si $M(x,\ y)$ est un point de (E) et $M'(x,\ y)$ son image par r alors

$$x+iy = e^{-i\frac{\pi}{4}}(x' + iy') = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' + iy')$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x'+iy') = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+iy'-ix'+y')$$

Ce qui donne $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$ et $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y'-x')$ et puisque $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ on aura

$$\frac{1}{2}(x'+y')^2 + \frac{1}{2}\frac{(y'-x')^2}{4} = 1$$

Soit $4(x'+y')^2 + (y'-x')^2 = 8$ et par suite $5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 = 8$

Donc l'image of (E) par r est la courbe (C) d'équation: $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$

b) (E) est une ellipse et puisque la rotation conserve les figures géométriques alors (C) est une ellipse.

c) L'axe focal (Δ) de (C) est l'image de l'axe focal de (E) par r Or l'axe focal de (E) est l'axe ($y'y$) d'équation $x = 0$

$x = 0$ donne $\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') = 0$; donc la droite ($\Delta$) d'équation $y = -x$ est l'axe focale de (C)

F (0, $\sqrt{3}$) est un foyer de (E), ce point F se transforme en un point F_1 par la rotation r

$z_{F_1} = e^{i\frac{\pi}{4}} z_F = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(i\sqrt{3}) = \frac{i\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}$ donc F_1 $(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2})$ est un foyer de (C)

L'excentricité de (C) est égale a celle de (E), donc $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

aire de (C) = aire de (E) = $\pi ab = 2\pi$ *unité d'aire*.

II- 1) $P(E_1) = \frac{1}{3}$ E_1 étant réalisé, donc dans l'urne U_2 il y a 2 boules rouges et 1 boule noire,

Donc $P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{2}{3}$

$\overline{E_1}$ étant réalisé, donc dans l'urne U_2 il y a 1 boules rouges et 2 boule noire, donc $P\left(\frac{E_2}{\overline{E_1}}\right) = \frac{1}{3}$

$P(E_2) = P_2 = P(E_2 \cap E_1) + P(E_2 \cap \overline{E_1})$

$$= P(E_1) \times P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) + P(\overline{E_1}) \times P\left(\frac{E_2}{\overline{E_1}}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

2) $P_{k+1} = P(E_{k+1}) = P(E_k \cap E_{k+1}) + P(\overline{E}_k \cap E_{k+1})$

$$= p\left(\frac{E_{k+1}}{E_k}\right) \times p(E_k) + p\left(\frac{E_{k+1}}{\overline{E_k}}\right) \times p(\overline{E_k}) \quad \text{or}$$

$$p\left(\frac{E_{k+1}}{E_k}\right)=\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad p\left(\frac{E_{k+1}}{\overline{E_k}}\right)=\frac{1}{3}$$

D'où $P_{k+1}=P(E_{k+1}) \;=\; \frac{2}{3}\times P_k+\frac{1}{3}\times(1-P_k)=\frac{1}{3}P_k+\frac{1}{3}$

3) a- $V_1 = P_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$

$V_{k+1} = P_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}P_k+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}P_k-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}(P_k-\frac{1}{2})=\frac{1}{3}V_k$

Donc (V_k) est une suite géométrique de raison 1 /3

b- $V_k=V_1\times q^{k-1}=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ $d'ou\ P_k=V_k+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}+\frac{1}{2}$

La suite (V_k) est majorée par $\frac{1}{2}\,car\,-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$

En plus la suite (V_k) est croissante car

$P_{k+1} - P_k = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}>0$

Donc $P_{k+1} > P_k$.

La suite (P_k) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

$\lim\limits_{k\to+\infty}P_k=\frac{1}{2}\,car\,\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=0$

III- A- 1) T est de la forme $z'=(\frac{3}{4}z+\frac{1}{4})$ avec $a = \frac{3}{4}$, réel, T est une homothétie de rapport $\frac{3}{4}$ et de centre le point w d'affixe $z_w = \frac{b}{1-a} = 1$.

2) T^{-1} est l'homothétie de rapport $\frac{4}{3}$ et de même centre que T .

B- 1) T est de la forme $z'=(1+i)z-i \;\; avec\, a=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Donc T est une similitude de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre le point w d'affixe

$z_W = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-i}{-i} = 1$

2) a- $W_{n+1} = z_{n+1} - 1 = (1+i)z_n - i - 1 = (1+i)(z_n - 1) = (1+i)W_n$

Donc la suite de terme général W_n est une suite géométrique de raison $q = 1+i$ et de premier terme $W_0 = z_0 - 1 = x_0 - 1$

b- $W_n = W_0 \times q^n = (x_0 - 1)(1+i)^n$

c- $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $d'ou\ |W_n| = |x_0 - 1| \times |1+i|^n\ or\ x_0 - 1 > 0\ d'ou\ |W_n| = (x_0 - 1) \times (\sqrt{2})^n$.

arg W_n = $\arg\left((x_0 - 1) \times (1+i)^n\right) = \arg(x_0 - 1) + \arg(1+i)^n$

arg W_n = $0 + n\dfrac{\pi}{4}(2\pi) = n\dfrac{\pi}{4}(2\pi)$

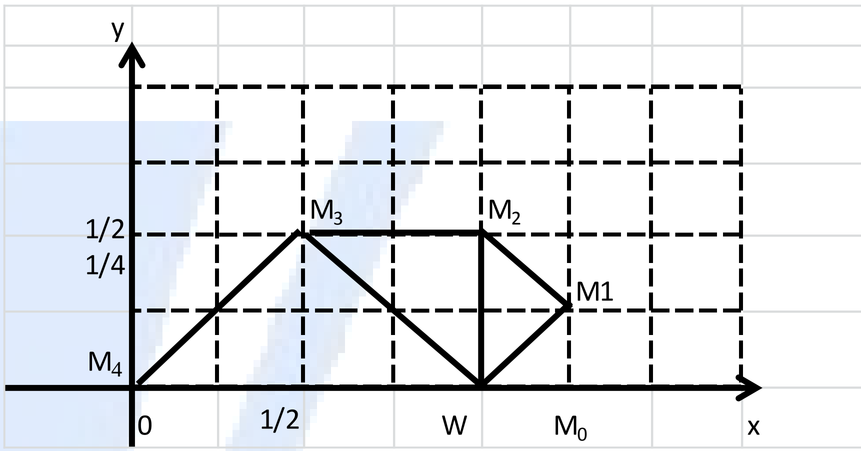
d- Si M_n est un point de l'axe des abscisses alors z_n est réel, d'où $W_n = z_n - 1$ est réel

ce qui fait que $n\dfrac{\pi}{4} = k\pi$ et par suite $n = 4k$ avec $k \in IN$ car k est un entier naturel.

e- Si M_4 soit confondu avec O alors $z_4 = 0$, d'où $W_4 = -1$, ce qui donne

$$(x_0 - 1) \times (1+i)^n = -1,\ soit\ x_0 - 1 = \frac{-1}{(1+i)^4} = \frac{1}{4}\ et\ par\ suite\ x_0 = \frac{5}{4}$$

f-



C- 1) $M(z) \xrightarrow{s} M'(z' = bz + a) \xrightarrow{T} M''(z'' = az + b)$

$M(z) \xrightarrow{T \circ s} M''(z'' = abz + a^2 + b)$

$M(z) \xrightarrow{T} M_1(z_1 = az + b) \xrightarrow{s} M_2(z_2 = bz_1 + a)$

$M(z) \xrightarrow{s \circ T} M_2(z_2 = abz + b^2 + a)$

$T \circ S = S \circ T$ donne $T \circ S\ (M) = S \circ T(M)$ *d'*ou

$abz + a^2 + b = abz + b^2 + a$, par suite $a^2 - b^2 = a - b$ soit

$(a-b)(a+b) - (a-b) = 0$ *ou* $(a-b)(a+b-1) = 0$ ce qui donne

$a - b = 0$ ou $a + b - 1 = 0$ et puisque $a \neq b$ on aura $a + b = 1$

Donc a et b sont racines de l'équation $z^2 - z + m = 0$ ou $m = ab$

Avec $m \neq 0$ car $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$

2) $z_{w_T} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{1-a}{1-a} = 1, \quad z_{w_s} = \dfrac{a}{1-b} = \dfrac{1-b}{1-b} = 1$

$z_{w_{s \circ T}} = \dfrac{b^2 + a}{1 - ab} = \dfrac{b^2 + 1 - b}{1 - b(1-b)} = 1$, donc T, S et $S \circ T$ ont le même point double.

IV) A)

1) h est continue et strictement décroissante sur IR donc elle admet sur IR une fonction réciproque g. Puisque (ℓ) passe par O alors g passe par O donc g(0) = 0

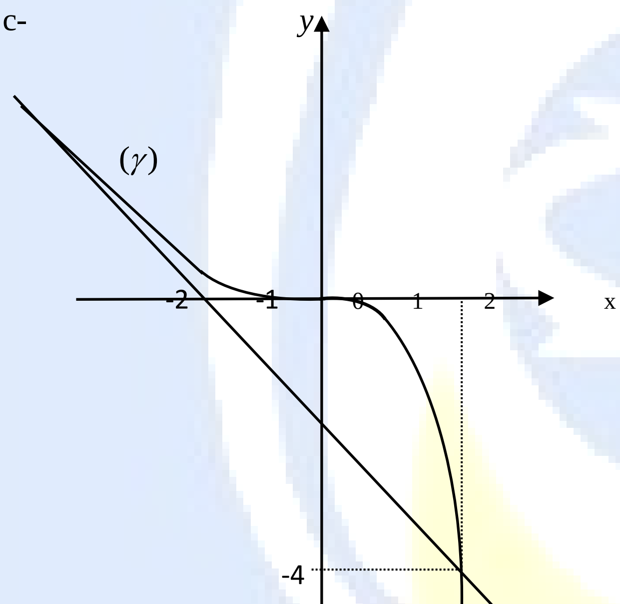
2) Soit (γ) la courbe représentative de g

a- L'axe y´y est tangent en O à (ℓ) donc la courbe (γ) est tangente en O à l'axe $x´x$, par suite $g´(0) = 0$

b- La droite (d) est une asymptote a (ℓ), donc (γ) admet comme asymptote oblique la droite ($d´$) symétrique de (d) par rapport à la droite d'équation y = x.

Or (d) passe par le point (0 ; -2) donc ($d´$) passe par le point (-2 ; 0) de même (d) passe par le point (-2 ; 0) donc ($d´$) passe par le point (0 ; -2) donc ($d´$) n'est autre que (d) et par suite (d) est une asymptote à (γ)

c-



d- D'après la courbe représentative de g, on remarque qu'une partie (γ)

est située dans le deuxième quadrant et une partie dans le quatrième quadrant donc $g(x)$ et x sont de signes opposés sauf en O ou g(0) = 0

3) a- $g´(x) = a\,(1+ e^x) + e^x\,(ax + b)$

b- $g(0) = 0$ donne $2b + c = 0$

$g´(0) = 0$ donne $2a + b = 0$

On a $h(-4) = 2$donc et $g(2) = -4$ ce qui donne $(2a + b)(1 + e^2) + c = -4$

Or $2a+b = 0$ d'où $c = -4$; $2b + c = 0$

Alors $b = 2$, $2a+b = 0$ donne $a = -1$ par suite

$g(x) = (-x + 2)(1 + e^x) - 4$, soit $g(x) = (2 - x)\,e^x - x - 2$

B) 1) $\int \frac{dx}{1+e^{x}} = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = -\ln(1+e^{-x}) + k$

2) (E) : $(1+e^{x})$ y´-y = 0 est équivalente a

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{1+e^{x}}$ *d'ou* $\int \frac{y'}{y} dx = \int \frac{1}{1+e^{x}} dx$*, ce qui donne* $\ln|y| = -\ln(1+e^{-x}) + k$

Soit $\ln|y| + \ln(1+e^{-x}) = k$ *ou* $\ln|y(1+e^{-x})| = k$ *donc* $y(1+e^{-x}) = \pm e^{k}$

Soit $y = \pm\frac{e^{k}}{1+e^{-x}}$ et par suite $y = \frac{C}{1+e^{-x}}$

Au point I (0 ; 2) on a 2= $\frac{C}{1+1}$ ce qui donne C = 4 et par suite $y = \frac{4}{1+e^{-x}} = \frac{4e^{x}}{1+e^{x}}$

C) 1) $f'(x) = \frac{4e^{x}}{(1+e^{x})^{2}} > 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$ *f(x)* = 0 , $\lim\limits_{x\to+\infty}$ *f(x)* = 4

x	$-\infty$ $+\infty$
f´ (x)	+
f (x)	0 $\nearrow$ 4

f est continue et strictement croissante sur IR, donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} *de domaine*]0, 4[

$y = \frac{4e^{x}}{1+e^{x}}$ donne $y + ye^{x} = 4e^{x}$ d'où e^{x}(4-y) = y ce qui donne $e^{x} = \frac{y}{4-y}$

par suite $x = \ln\frac{y}{4-y}$ donc $f^{-1}(x) = \ln\frac{x}{4-x}$

2) $f(-x) + f(x) = \frac{4e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{4e^{x}}{1+e^{x}} = \frac{4e^{x}+4}{1+e^{x}} = \frac{4(e^{x}+1)}{1+e^{x}} = 4$ donc le point I (0, 2) est un centre de symétrie de (*C*)

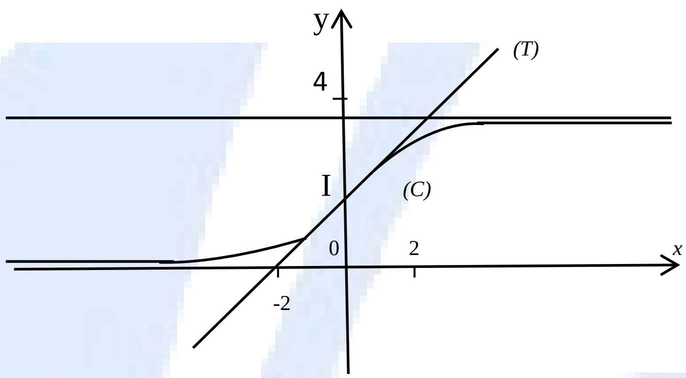
Une équation de la tangente (*T*) à (*C*) au point I est
y= f(0)+ f ´(0)(x-0) =2+1(x-0) soit *y* = *x* + 2

3) $f(x) - \mathrm{y} = \frac{4e^{x}}{1+e^{x}} - x - 2 = \frac{4e^{x} - x - xe^{x} - 2 - 2e^{x}}{1+e^{x}} = \frac{g(x)}{1+e^{x}}$ or *x* et g(*x*) sont de signes contraires, d'où

Si *x* > 0 , g(*x*) <0 donc (*C*) est au-dessous de (*T*)

Si $x < 0$ g(x) >0 donc (C) est au-dessus de (T)

4)



D- 1) $F(x) = g(f(x))$, donc $F'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$, or g est décroissante donc $g'(f(x)) < 0$ et f est croissante donc $f'(x) > 0$ donc $F'(x) < 0$ est par suite F est décroissante.

2) $F(0) = g(f(0)) = g(2) = -4$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} g(f(x)) = g(0) = 0$$