UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Entrance Exam 2015 - 2016 — ***Mathematics*** — ***Duration : 3 hours***

The distribution of grades is over 25 — ***July 04 , 2015***

I- (2.5 pts) Consider the equation (E) : $z^2+(6+23i)z+17-31i=0$ where z is a complex number .

1- Verify that $1+i$ is a root of (E) and determine the other root .

2- Determine an argument of each of the roots of (E) .

3- Calculate the product of the two roots of (E) and deduce that $\arctan\frac{24}{7}+\arctan\frac{31}{17}=\frac{3\pi}{4}$.

II- (2.5 pts) Consider the sequences (U_n) and (V_n) defined for $n\geq 1$ by $U_n=\cos\frac{\alpha}{2^n}$ and $V_n=\sin\frac{\alpha}{2^n}$ where $\alpha\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

1- a) Determine the limit of each of these two sequences and prove that $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n V_n\right)=\alpha$.

b) Prove that , for all $n\geq 1$, $2U_{n+1}\times V_{n+1}=V_n$.

2- Consider the sequence (W_n) defined, for $n\geq 1$, by $W_n=U_1\times U_2\times U_3\times\cdots\cdots\times U_n$.

Prove by induction that , for all $n\geq 1$, $W_n\times V_n=\frac{1}{2^n}\sin\alpha$ and determine the limit of (W_n) .

III- (2 pts) Consider two boxes E and F containing identical balls such that :
E contains 4 white balls and 2 red balls and F contains 3 white balls .
3 balls are drawn at random from box E and put in box F , then 3 balls are drawn at random from F .
Consider the event L : " the balls drawn from box F do not have the same color " .

1- What drawing from box E makes the event L impossible ?

2- Prove that the probability of the event L is equal to $\frac{23}{50}$.

IV- (6 pts) The complex plane is referred to a direct orthonormal system $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
Consider the straight lines (d_1) and (d_2) of respective equations $y=x$ and $y=-x$.
To each point M of affix $z=\alpha+i\beta$ not belonging to $(d_1)\cup(d_2)$ we associate the points M' and M'' of respective affixes z' and z'' such that $z'=\frac{1}{2}(z+i\bar{z})$ and $z''=\frac{1}{2}(z-i\bar{z})$.

1- a) Prove that $\frac{z'-z}{1+i}$ and $\frac{z''-z}{1-i}$ are pure imaginary numbers .

b) Prove that M' and M'' are the orthogonal projections of M on (d_1) and (d_2) respectively .

Suppose in what follows that $z^2+\bar{z}^2=8$.

2- a) Prove that the set of M is the hyperbola (H) of equation $x^2-y^2=4$.

b) Determine the focus F of positive abscissa of (H) and the corresponding directrix (d). Draw (H).

c) Using the product $z'z''$, prove that, as M varies on (H), the area of the rectangle $OM'MM''$ remains constant.

3- a) Write an equation of the tangent (T) to (H) at the point M with affix $z=\alpha+i\beta$

b) Prove that (T) cuts (d_1) and (d_2) respectively at the points R and S with affixes $2z'$ and $2z''$.

c) Deduce that M is the mid point of $[RS]$.

4- Determine the points M_1 and M_2 where the tangents (T_1) and (T_2) to (H) cut the directrix (d) at the point L with ordinate 1 and prove that $[M_1M_2]$ is a focal chord of (H).

V- (4 pts) Consider, in an oriented plane, two points A and B such that $AB=4$.

Let R_1 be the rotation of center A and angle $\frac{\pi}{3}$ rad and R_2 the rotation of center B and angle $-\frac{2\pi}{3}$ rad.

1- Draw a figure and plot the points C and D such that $C=R_1(B)$ and $D=R_2(A)$.

2- Let R_3 be the inverse rotation of R_1 and $f=R_2\circ R_3$.

a) Determine $f(A)$ and $f(C)$.

b) Determine the nature and the elements of f and deduce that $ABCD$ is a parallelogram.

3- Consider a point M distinct from A and B.

a) Plot the points M_1 and M_2 such that $M_1=R_1(M)$ and $M_2=R_2(M)$.

b) Prove that, as M varies, the mid point of $[M_1M_2]$ remains fixed.

4- a) Determine a measure in radians of each of $(\overrightarrow{MM_1};\overrightarrow{MA})$ and $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MM_2})$.

b) Prove that $(\overrightarrow{MM_1};\overrightarrow{MM_2})=(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})+\frac{\pi}{2}$ (2π).

c) Deduce the set of points M such that M, M_1 and M_2 are collinear.

VI- (8 pts) The plane is referred to an orthonormal system $(O;\vec{i},\vec{j})$.

A- Let (L) be the curve of equation $y=2e^x$ and (Δ) the straight line of equation $y=2x$.

Let A and B be two points of abscissa m belonging to (L) and (Δ) respectively.

The tangent (T) to (L) at A cuts the axis of ordinates at a point C.

1- Write an equation of (T) and determine the ordinate of C in terms of m.

2- a) Determine, in terms of m, the coordinates of the point G such that $4\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

b) Determine the set of G as m traces IR.

B- Consider the function f defined on IR by $f(x) = x + e^{2x} - xe^{2x}$ and let (C) be its representative curve .

1- a) Set up the table of variations of the derivative f' of f .

b) Prove that f has a maximum at a real number α and prove that $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha^2}{2\alpha - 1} - 1$.

c) Set up the table of variations of f .

2- a) Study the concavity of (C) and write an equation of the tangent (δ) to (C) at the point of inflection I .

b) Determine the abscissas of the points of (C) with ordinate 1 .

c) Assuming that $\alpha = 0.634$ and that 2 is an approximate value of $f(\alpha)$. Draw (δ) and (C) .

d) Calculate the area of the domain bounded by (C), the straight line (d) of equation $y = x$, the axis of ordinates and the straight line of equation $x = 1$.

3- a) Prove that the restriction of f to the interval $K =]-\infty\,;\alpha]$ has an inverse function h whose domain of definition is to be determined .

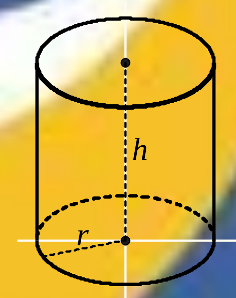
b) Draw the representative curve (C') of h in the same system as (C).

4- Let M be a point of (C) whose abscissa a belongs to the interval K .

a) The perpendicular to (d) drawn through M cuts (C') at a point M'. Calculate MM' in terms of a .

b) Determine a so that MM' is maximum and prove that the tangents to (C) and (C') at the corresponding points M and M' are parallel .

VII- (1 pt Bonus) We want to make a metallic cylindrical box with lid having a given volume V .
Find the relation between its height h and the radius r of the base that minimize the amount of sheet metal used .

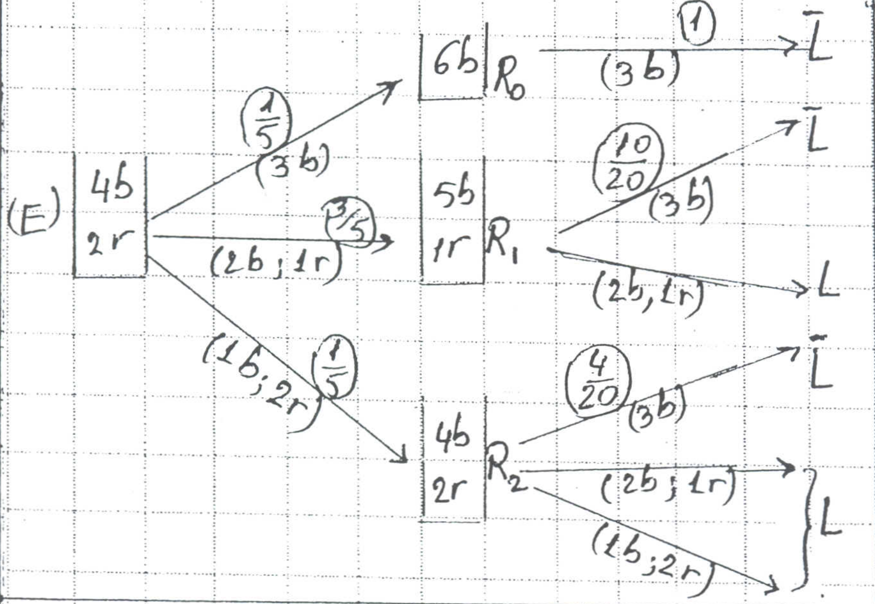


<table>
<tr><th>Q</th><th>Éléments des réponses</th><th>Notes</th></tr>
<tr><td>I</td><td>Soit $E(z)=z^2+(6+23i)z+17-31i=0$</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>• $E(1+i)=(1+i)^2+(6+23i)(1+i)+17-31i=\dots=0$; $\boxed{(1+i)\text{ est une racine}}$
• $z'+z''=-\frac{b}{a}=-6-23i$, nous donne l'autre racine $\boxed{z''=-7-24i}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>• un argument de $z'=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ $\boxed{\arg(z')=\pi/4}$
• $\arg(z'')=\arg(7+24i)-\pi=\arctan(\frac{24}{7})-\pi$ $\boxed{\arg(z'')=\arctan\frac{24}{7}-\pi}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>• $\boxed{z'z''=\frac{c}{a}=17-31i}$ $\arg(z'z'')=\arg(17-31i)=-\arg(17+31i)\ [2\pi]$
• $\arg(z')+\arg(z'')=-\arg(17+31i)+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$, nous donne :
$\pi/4+\arctan\frac{24}{7}-\pi=-\arctan\frac{31}{17}+2k\pi$, d'où :
$\boxed{\arctan\frac{24}{7}+\arctan\frac{31}{17}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$ où $k\in\mathbb{Z}$
• Mais $\frac{\pi}{4}<\arctan\frac{24}{7}<\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4}<\arctan\frac{31}{17}$ alors :
$\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{4}+2k\pi<\pi$, d'où $-\frac{\pi}{8}<k\pi<\frac{\pi}{8}$, alors : $\boxed{k=0}$ donc :
$\boxed{\arctan\frac{24}{7}+\arctan\frac{31}{17}=3\pi/4}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>II
1a</td><td>• si $n\to+\infty$, $2^n\to+\infty$; $\frac{\alpha}{2^n}\to0$ alors : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}U_n=1}$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}V_n=0}$
• Soit $\theta=\frac{\alpha}{2^n}$, si $n\to+\infty$; $\theta\to0$, or $\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$
alors : $\lim_{n\to+\infty}(2^n.V_n)=\lim_{\theta\to0}[\alpha.(\frac{\sin\theta}{\theta})]=\alpha$. $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(2^nV_n)=\alpha}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>$2V_{n+1}.U_{n+1}=2\cos(\frac{\alpha}{2^{n+1}}).\sin(\frac{\alpha}{2^{n+1}})=\sin[2(\frac{\alpha}{2^{n+1}})]=\sin\frac{\alpha}{2^n}$
donc : $\boxed{2V_{n+1}\cdot U_{n+1}=V_n}$ (pour $n\geq1$) « $\sin2x=2\cos x.\sin x$ »</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>• pour $n=1$: $W_1.U_1=U_1.V_1=\cos\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sin\alpha$ (Vrai pour $n=1$)
• on pose que l'égalité $W_k.V_k=\frac{1}{2^k}\sin\alpha$ est vraie pour k.
$W_{k+1}.V_{k+1}=U_1U_2U_3\cdots U_kU_{k+1}.V_{k+1}=W_k.U_{k+1}.V_{k+1}$
$=W_k.(\frac{1}{2}V_k)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2^k}\sin\alpha)=\frac{1}{2^{k+1}}\sin\alpha$ alors
l'égalité est vraie pour l'ordre $k+1$, donc :
$\boxed{W_n.V_n=\frac{1}{2^n}\sin\alpha}$ (pour tout entier $n\geq1$)
• $\lim_{n\to+\infty}(W_n)=\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2^n.V_n})\sin\alpha=\frac{1}{\alpha}.\sin\alpha$, donc : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}W_n=\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$</td><td>2</td></tr>
</table>

Q	Éléments des réponses	N

III

1 on désigne par R_k l'évènement "k boules rouges tirées de E" avec $k\in\{0,1,2\}$, $\bar{L}$: "les boules tirées de F sont de même couleur".



pour rendre L est impossible, il faut tirer 3 boules blanches de E, soit R_0 "aucune boule rouge de E" R_0 "trois boules blanches de E". 1

2 $P(L)=1-p(\bar{L})=1-p$(3 boules blanches de la boîte F)

$$p(\bar{L})=P(R_0\cap\bar{L})+P(R_1\cap\bar{L})+P(R_2\cap\bar{L})$$

$$=\left[\frac{C_4^3}{C_6^3}\right](1)+\left[\frac{C_4^2\cdot C_2^1}{C_6^3}\right]\left(\frac{C_5^3}{C_6^3}\right)+\left[\frac{C_4^1\cdot C_2^2}{C_6^3}\right]\left(\frac{C_4^3}{C_6^3}\right)$$

$$=\left(\frac{4}{20}\right)(1)+\left(\frac{12}{20}\right)\left(\frac{10}{20}\right)+\left(\frac{4}{20}\right)\left(\frac{4}{20}\right)=\dots=\frac{27}{50}$$, d'où : $\boxed{P(L)=\frac{23}{50}}$ 3

IV

1a $M(z=\alpha+i\beta)\notin(d_1)\cup(d_2)$ alors : $\beta\neq\alpha$ et $\beta\neq-\alpha$ d'où : $\beta^2\neq\alpha^2$

$z'=\frac{1}{2}(z+i\bar{z})=\dots=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(1+i)$ et $z''=\frac{1}{2}(z-i\bar{z})=\dots=\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)(1-i)$

le calcul complexe nous donne :

$\boxed{\frac{z'-z}{1+i}=\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)i}$ est un imaginaire pur, car ($\alpha\neq\beta$; $M\notin(d_1)$) 1

$\boxed{\frac{z''-z}{1-i}=\frac{-(\alpha+\beta)}{2}i}$ est un imaginaire pur, car ($\beta\neq-\alpha$; $M\notin(d_2)$)

1b Soit $\vec{V}(1;1)$ et $\vec{W}(1,-1)$ sont deux vecteurs directeurs des (d_1) et (d_2)

• $\frac{z'-z}{1+i}=\frac{Z_{\overrightarrow{MM'}}}{Z_{\vec{V}}}$ imaginaire alors : $\overrightarrow{MM'}\perp\vec{V}$ mais $z'=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $M'\in(d_1)$ } donc : $\boxed{M'=\text{proj}_{(d_1)}M}$ 2

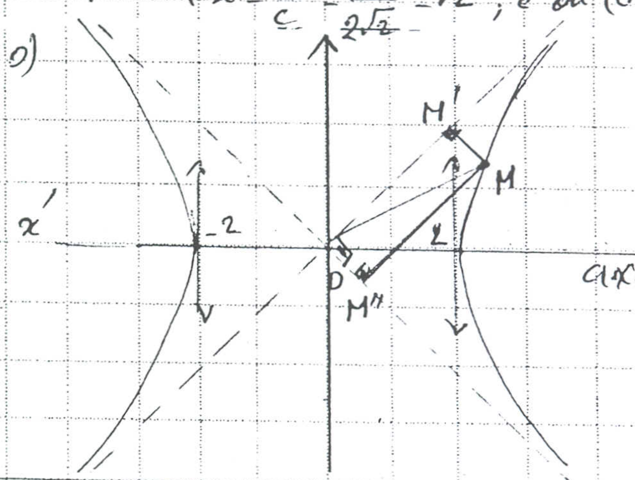
• $\frac{z''-z}{1-i}=\frac{Z_{\overrightarrow{MM''}}}{Z_{\vec{W}}}$ imaginaire alors $\overrightarrow{MM''}\perp\vec{W}$ mais $z''=\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $M''\in(d_2)$ } donc : $\boxed{M''=\text{proj}_{(d_2)}M}$

2

Éléments des réponses — Notes

2a $z^2+\bar{z}^2=8$, Soit $M(z=x+iy)$ alors : $(x+iy)^2+(x-iy)^2=8$, donc :
$\boxed{x^2-y^2=4}$ (H) est une hyperbole équilatère. $(a=b=2)$ — **1**

2b • L'axe focal de (H) est l'axe $x'x$, $F\in x'x$, $c^2=2a^2=8$, $c=2\sqrt2$ $\boxed{F(2\sqrt2\,;0)}$
• La directrice (d) associée à F est : $x=\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{4}{2\sqrt2}=\sqrt2$, d'où (d) $\boxed{x=\sqrt2}$
Sommets : $(2;0)$, $(-2;0)$
asymptotes : $(d_1) : y=x$
$(d_2) : y=-x$ — **2**



2c $z'z''=\frac12(z+i\bar z)\times\frac12(z-i\bar z)=\frac14(z^2+\bar z^2)=\frac14(8)=2$.
$(d_1)\perp(d_2)$, aire$(OM'MM'')=OM'.OM''=|z'||z''|=|z'z''|=2$ $\boxed{\text{aire } A=2\ u^2}$ — **1**

3a $M(\alpha;\beta)\in(H)$, une équation de (T) est : $\boxed{\alpha x-\beta y=4}$ où $(\alpha^2-\beta^2=4)$ — **1**

3b $(T)\cap(d_1)$: $\begin{cases}\alpha x-\beta y=4\\ y=x\end{cases}$ nous donne : $x=\dfrac{4}{\alpha-\beta}=\dfrac{4(\alpha+\beta)}{\alpha^2-\beta^2}=\alpha+\beta$ d'où
$\boxed{R(\alpha+\beta\,;\alpha+\beta)}$ mais $z'=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, donc $\boxed{z_R=2z'}$
$(T)\cap(d_2)$: $\begin{cases}\alpha x-\beta y=4\\ y=-x\end{cases}$ nous donne : $x=\dfrac{4}{\alpha+\beta}=\dfrac{4(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\beta^2}=\alpha-\beta$
$\boxed{S(\alpha-\beta\,;\beta-\alpha)}$ mais $z''=\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$, donc : $\boxed{z_S=2z''}$ — **1**

3c $z_R+z_S=2z'+2z''=z+i\bar z+z-i\bar z=2z=2z_M$ alors $\boxed{M \text{ est le milieu de } [RS]}$ — **1**

4 • $M(\alpha;\beta)\in(H)$ alors $\alpha^2-\beta^2=4$, si une tangente passe par le point $L(\sqrt2\,;1)$ alors : $\alpha\sqrt2-\beta=4$, d'où $\beta=\alpha\sqrt2-4$
le système $\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=4\\ \beta=\alpha\sqrt2-4\end{cases}$ nous donne : $\boxed{\alpha^2-8\sqrt2\,\alpha+20=0}$ équation (E)
• l'équation (E) admet deux racines : $\alpha_1=4\sqrt2+2\sqrt3$ et $\alpha_2=4\sqrt2-2\sqrt3$
d'où : $\beta_1=\alpha_1\sqrt2-4=4+2\sqrt6$ donc : $\boxed{M_1(4\sqrt2+2\sqrt3\,,\ 4+2\sqrt6)}$
$\beta_2=\alpha_2\sqrt2-4=4-2\sqrt6$ $\boxed{M_2(4\sqrt2-2\sqrt3\,,\ 4-2\sqrt6)}$
• Les coordonnées des M_1 et M_2 vérifient $\beta=\alpha\sqrt2-4$ alors la droite (M_1M_2) est : $\boxed{y=x\sqrt2-4}$ mais $F(2\sqrt2;0)$ vérifie cet équation d'où $F\in(M_1M_2)$, donc $\boxed{[M_1M_2] \text{ corde focale}}$ "ou bien vecteurs colinéaires" — **2**

Q	Éléments des réponses	

V — 1

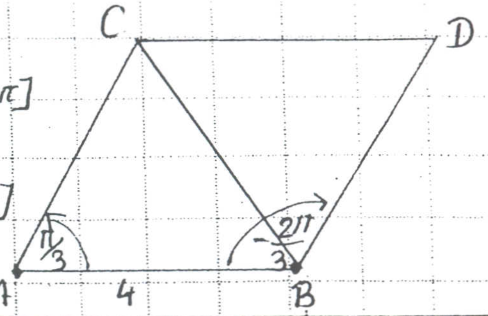
$R_1(A;\frac{\pi}{3})$, $R_2(B;-\frac{2\pi}{3})$:

• $R_1(B)=C$: $AC=AB$ et $(\vec{AB};\vec{AC})=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

ABC triangle équilatéral direct.

• $R_2(A)=D$: $BD=BC$ et $(\vec{BA};\vec{BD})=-\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

puis CBD équilatéral direct (figure)



1

2a

$R_1^{-1}=R_3(A;-\frac{\pi}{3})$; $f=R_2\circ R_3$:

• $f(A)=R_2(R_3(A))=R_2(A)=D$ • $f(C)=R_2(R_3(C))=R_2(B)=B$

$\boxed{f(A)=D}$ $\boxed{f(C)=B}$

1

2b

• en générale la composée des deux rotations est une rotation, mais angle f = angle R_2 + angle $R_3=-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=-\pi$, donc : f est une symétre centrale, or $f(C)=B$, le centre de f est le milieu I de $[BC]$

$\boxed{f = \text{symétrie centrale } S_I}$.

• $f(A)=D$ et $f(C)=B$ alors I est le milieu des $[AD]$ et $[CB]$, on déduit que : $\boxed{ABDC \text{ est un parallélogramme}}$

1

3a

$(M\neq A$ et $M\neq B)$

$M_1=R_1(M)$ "Construction de M_1"

$M_2=R_2(M)$ "Construction de M_2"

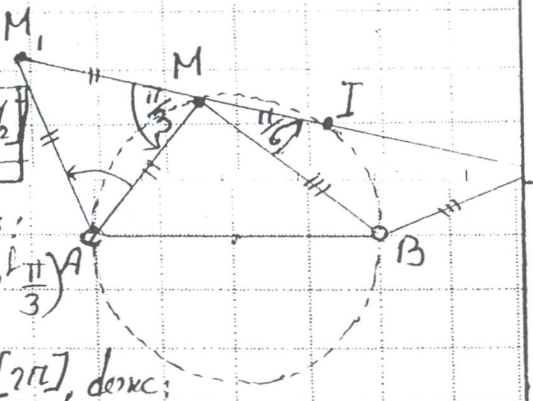
1

3b

$M_1 \xrightarrow{R_1^{-1}=R_3} M \xrightarrow{R_2} M_2$

$M_2=R_2(M)=R_2(R_3(M_1))=f(M_1)$ alors :

$M_2=sym_I(M_1)$, donc : $\boxed{I \text{ milieu de } [M_1M_2]}$



1

4a

• AMM_1 triangle équilatéral direct alors :

$\boxed{(\vec{MM_1};\vec{MA})=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$ (une mesure est $\frac{\pi}{3}$)

• $(\vec{MB};\vec{MM_2})=\frac{1}{2}\left[\pi-\frac{2\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$, donc :

$\boxed{(\vec{MB};\vec{MM_2})=\pi/6\ [2\pi]}$ (une mesure est $\frac{\pi}{6}$)

1

4b

$(\vec{MM_1};\vec{MM_2})=(\vec{MM_1};\vec{MA})+(\vec{MA};\vec{MB})+(\vec{MB};\vec{MM_2})\ [2\pi]$

$=\frac{\pi}{3}+(\vec{MA};\vec{MB})+\frac{\pi}{6}=(\vec{MA};\vec{MB})+\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

1

4c

Dans le cas où M, M_1 et M_2 sont alignés : $(\vec{MM_1};\vec{MM_2})=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

alors : $(\vec{MA};\vec{MB})=-\frac{\pi}{2}+k\pi$, d'où $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ sont orthog.

donc : " l'ensemble des M est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B ".

1

2

Éléments des réponses — Notes

A) 1

- $y=2e^x$; $y'=2e^x$; $A(m;2e^m)$ et pente $=2e^m$, d'où (T) : $\boxed{y=2e^m(x-m+1)}$
- (T) coupe l'axe $y'y$ en C ; $x_C=0$ alors : $\boxed{y_C=2(1-m)e^m}$

Notes : 1

2 a

- $x_G=\frac{1}{4}(x_A+x_B+x_C)=\frac{1}{4}(m+m+0)=\frac{m}{2}$
- $y_G=\frac{1}{4}(y_A+y_B+y_C)=\frac{1}{4}[2e^m+2m+2(1-m)e^m]$

Alors : $\boxed{G\left(\frac{m}{2};\frac{1}{2}(m+2e^m-me^m)\right)}$

Notes : $\frac{1}{2}$

2 b

$x_G=\frac{m}{2}\Rightarrow m=2x_G$ alors $y_G=\frac{1}{2}(2x+2e^{2x}-2xe^{2x})=x+e^{2x}-xe^{2x}$

alors : l'ensemble des G est la courbe de la fonction $\boxed{y=x+e^{2x}-xe^{2x}}$

Notes : 1

B) 1 a

$f(x)=x+e^{2x}-xe^{2x}=x+(1-x)e^{2x}$

$f'(x)=1+(1-2x)e^{2x}$

$f''(x)=-4x\,e^{2x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^{2x}-xe^{2x})=1+0-0=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=1+(-\infty)(+\infty)=-\infty$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Notes : $1\frac{1}{2}$

1 b

- $f'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et croît de limite 1 à 2, $f'(x)>0$ pour $x\in]-\infty;0]$
- $f'(x)$ continue et st. décroissante sur $[0;+\infty[$ et passe d'une valeur positive 2 à $-\infty$, alors $f'(x)=0$ admet une seule solution α et $f'(x)$ change leur signe de $(+)$ à $(-)$, donc f admet un maximum d'abscisse α.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

- $f'(\alpha)=0\Rightarrow e^{2\alpha}=\frac{1}{2\alpha-1}$ alors :

$f(\alpha)=\alpha+(1-\alpha)e^{2\alpha}=\alpha+(1-\alpha)\left(\frac{1}{2\alpha-1}\right)=\frac{2\alpha^2+1-2\alpha}{2\alpha-1}$ d'où : $\boxed{f(\alpha)=\frac{2\alpha^2}{2\alpha-1}-1}$

Notes : 1

1 c

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+e^{2x}-xe^{2x})=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x+(1-x)e^{2x}]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[1+\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{2x}\right]=(+\infty)(-\infty)=-\infty$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

Notes : 1

2 a

- $f''(x)$ s'annule au valeur $x=0$ avec changement de signe alors (C) admet un point d'inflexion $\boxed{I(0;1)}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

- $f''(x)>0$; $x<0$, (C) admet une concavité vers le sens des y positifs
  $f''(x)<0$; $x>0$, (C) admet une concavité vers le sens des y négatifs
- La tangente en I est : $\boxed{y=2x+1}$ (δ)

Notes : 1

2 b

Si $y=f(x)=1$ alors : $x+(1-x)e^{2x}-1=0$ puis : $(x-1)(1-e^{2x})=0$ alors $x=1$ ou $e^{2x}=1$, d'où ($x=1$ ou $x=0$), on obtient les points $\boxed{(0;1)\text{ et }(1;1)}$

Notes : $\frac{1}{2}$

Q	Éléments des réponses	Notes

2C (courbe) : vérifions

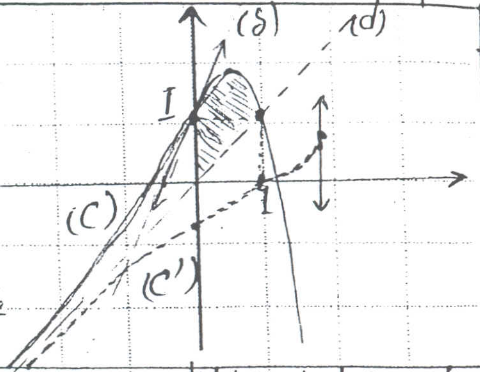
$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$, $(d): y=x$ A.O

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=-\infty$, D.A // $y'y$

• $\max(\alpha; f(\alpha))$ $I(0;1)$, $A(1;1)$

(C) coupe $x'x$ en deux points d'abscisses $x_1 < x_2$

$-0{,}6 < x_1 < -0{,}5$ et $1{,}1 < x_2 < 1{,}2$.



Notes : 2

2d aire $A = \int_0^1 [f(x)-x]dx = \int_0^1 (1-x)e^{2x}.dx = \left[\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}\right)e^{2x}\right]_0^1$

(par parties) d'où : $\boxed{A = \frac{e^2-3}{4}}$ (unité d'aires)

dérivée		primitive
$1-x$	$+$	e^{2x}
-1	$-$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
0	$+$	$\frac{1}{4}e^{2x}$

Notes : $1\frac{1}{2}$

3a f est continue et strictement croissante sur $K=]-\infty;\alpha]$ alors elle est bijective et admet une fonction réciproque $f^{-1}=h$. $\boxed{D_h = f(K) =]-\infty; f(\alpha)]}$

Notes : 1

3b La courbe (C') est le symétrique de (C) par rapport à $(d): y=x$ (figure)

Notes : 1

4a $M(a; f(a))$, $M'\in(C')$ et $M' = \mathrm{sym}_{(d)}(M)$ alors $M'(f(a); a)$ d'où :

$MM' = 2.d_{(M;d)} = 2.\frac{|y_M - x_M|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}|f(a)-a| = \sqrt{2}\left|(1-a)e^{2a}\right|$,

mais $a\in K$, $a \leq \alpha < 1$, $1-a>0$ et $e^{2a}>0$, donc $\boxed{MM' = \sqrt{2}(1-a)e^{2a}}$

ou bien : $MM'^2 = (f(a)-a)^2 + (a-f(a))^2 = 2(f(a)-a)^2$

Notes : 1

4b Soit la fonction $\varphi(a) = \sqrt{2}(1-a)e^{2a}$ où $a\in]-\infty;\alpha]$

$\varphi'(a) = \sqrt{2}(1-2a)e^{2a}$

a	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		α
$\varphi'(a)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(a)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

quand MM' soit maximum $\boxed{a = \frac{1}{2}}$

dans ce cas : pente$(T_M) = f'(\frac{1}{2}) = 1$

pente$(T_{M'}) = \frac{1}{f'(\frac{1}{2})} = 1$ } les tangentes en M et M' sont parallèles à $(d): y=x$.

Notes : 2

VII Bonus :

• V = base × hauteur $= \pi r^2.h$ d'où $h = \frac{V}{\pi r^2}$ où $(r>0)$

• aire A = 2.base + aire (latérale)

$= 2.\pi r^2 + 2\pi r.h = 2\pi r^2 + 2\pi r.\frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow \boxed{A(r) = 2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right)}$

• $A'(r) = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right) = 2\left(\frac{2\pi r^3 - V}{r^2}\right)$;

r	0		r_0		$+\infty$
$A'(r)$		$-$	0	$+$	
$A(r)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

• pour $A(r)$ soit minimum, $A'(r)=0$

$r^3 = \frac{V}{2\pi}$ d'où : $V = 2\pi r^3 = \pi r^2 h$

on obtient : $\boxed{h=2r.}$