UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2003 -2004 **Mathematique** **Duree: 3 heures**
juillet 2003

Remarque: L'usage d'une calculatrice non-programmable est permis.
La distribution des notes est sur 25

I- (4 points) On admet que, pour tout entier α $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\alpha} e^{-x} = 0$

On pose $U_p(n) = \int_0^n x^p e^{-x} dx$ ou n et p sont deux entiers naturels.

1) Calculer $U_0(n)$ et montrer que $U_1(n) = 1-(1+n)e^{-n}$

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que $U_2(n) = 2U_1(n) - n^2 e^{-n}$.
Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} U_1(n)$ et déduire $\lim\limits_{n\to\infty} U_2(n)$

3) En utilisant une intégration par parties, trouver une relation entre $U_p(n)$ et $U_{p-1}(n)$.
En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} U_p(n) = p!$

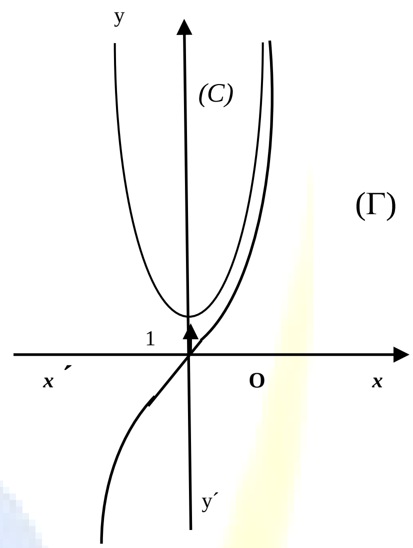
II- (3 points) On dispose de 3 urnes U_1, U_2 et U_3 telles que: U_1 contient <u>une</u> boule rouge et 4 boules blanches, U_2 contient 4 boules rouges et 4 boules blanches; U_3 contient 7 boules rouges et 3 boules blanches.

On désigne par: P_1 la probabilité de choisir l'urne U_1 ;
P_2 la probabilité de choisir l'urne U_2 ;
P_3 la probabilité de choisir l'urne U_3 ;

1) Sachant que P_1 , P_2 et P_3 sont respectivement proportionnelles à 1 , 2 et 3, montrer que $P_1 = \frac{1}{6}$ et calculer P_2 et P_3.

2) On choisit une urne, et de cette urne on choisit au hasard une boule.
   a) Calculer la probabilité de choisir une boule rouge sachant qu'elle provient de U_1
   b) Calculer la probabilité de l'évènement : la boule choisie est rouge et provient de U_1 ".
   c) Calculer la probabilité de l'évènement : la boule choisie est rouge
   d) Nous savons que la boule choisie est rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 ?

III- (8 points) Le plan étant rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.
Les deux coubes (C) et (Γ) ci-dessous représentent respectivement les variations de deux fonctions f et g, définie sur IR, et telles que f est la dérivée de g et g est la dérivée de f.



1) On pose $h(x) = \ln[\,f(x) - g(x)]$.
   a) démontrer que $h'(x)$ est constante.
   b) En déduire que $f(x) - g(x) = e^{-x}$
2) On désigne par U_n l'aire du domaine limité par (C), (Γ) et les deux droites d'équations $x = n - 1$ et $x = n$ où $n \in IN^{\bullet}$
   a) Montrer que $U_n = (e-1)e^{-n}$
   b) démontrer que U_n est le terme général d'une suite géométrique dont on calculera le premier terme et la raison.
   c) Calculer en fonction de n, la somme $S_n = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$ et déterminer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$
   d) Déterminer les valeurs de n tels que $S_n > 0.99$. Soit P la plus petite de ces valeurs; donner un encadrement de S_P d'amplitude 10^{-3}.
3) a) Démontrer que f et g sont deux solutions d'une même équation différentielle (E) du second ordre que l'on déterminera.
   b) Résoudre (E) et en déduire l'expression de $f(x)$ et celle de $g(x)$.
4) En utilisant uniquement la relation $f(x) - g(x) = e^{-x}$ et en admettant que f est pair et g est impair, démontrer que $f(-x) + g(-x) = e^{-x}$ et retrouver les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.

IV- (10 points) Les parties *A* et *B* du problème sont indépendantes.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$, on considère la transformation T qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az + b$
Où a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

A- **Dans cette partie on suppose que $b \neq 0$** .
On considère la suite de points M_n définie par $M_0 = O$ (O étant l'origine du repère) et $M_n = T(M_{n-1})$, et la suite de leurs affixes respectives z_n définie par $z_0 = 0$ et $z_n = a\,z_{n-1} + b$

1) a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $z_n = b\dfrac{1-a^n}{1-a}$
   b) Montrer que si $|a| < 1$, z_n a une limite ℓ que l'on déterminera.
   c) Que représente le point L d'affixe ℓ pour la transformation T ?

2) On suppose que $a = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$ et $b = 2\sin\alpha$ où α est un nombre non multiple de π

a) Donner la nature de la transformation T correspondante et déterminer ses éléments caractéristique en fonction de α .

b) En déduire que les points M_n d'affixes z_n se trouvent sur un cercle passant par O dont on déterminera le rayon et les coordonnées du centre.

c) Faire une figure dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et placer les points M_0, M_1, M_2 et M_3 .

B- **Dans cette parie on suppose que** $\alpha = 1 + i$ **et** $b = 0$.

La transformation T aura ainsi pour expression complexe $z' = (1+i)\,z$.

1) Quelle est la nature de T ? Déterminer ses éléments caractéristiques.

2) On considère l'hyperbole (H) d'équation $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

a) Déterminer le centre de (H), ses sommets et les équations de ses asymptotes. Tracer (H).

b) Déterminer l'excentricité de (H), l'un de ses foyers et la directrice correspondante.

3) On désigne par (H') la courbe transformée de (H) par T .

a) Démontrer que l'équation de (H') est $x^2 + y^2 + 18xy = 80$

b) Soit le point F_1 (3, 3) et la droite (Δ) d'équation $3x + 3y - 8 = 0$

Démontrer que l'ensemble des points N tels que $4NF_1^2 = 9NK^2$ ou NK est la distance de N à (Δ) , est la courbe (H').

c) En déduire que (H est une conique dont on déterminera la nature, l'excentricité, un foyer et la directrice correspondante.

Concours d'entrée 2003-2004 **Solution de Mathématique** **Durée : 3 heures**

I- 1) $U_0(n)=\int_0^n e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^n=-e^{-n}+1, U_1(n)=\int_0^n xe^{-x}dx$

Posons $u=x$ et $v'=e^{-x}$, on aura:
$u'=1$ et $v=-e^{-x}$, ce qui donne

$$U_1(n)=\int_0^n xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^n+\int_0^n e^{-x}dx=-ne^{-n}-e^{-n}+1=1-(1+n)e^{-n}$$

2) $U_2(n)=\int_0^n x^2e^{-x}dx$

Posons $u=x^2$ et $v'=e^{-x}$, on aura:
$u'=2x$ et $v=-e^{-x}$, ce qui donne

$$U_2(n)=\int_0^n x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}\Big|_0^n+\int_0^n 2xe^{-x}dx=-n^2e^{-n}+2\mathrm{U}_1(n)$$

$$\lim_{n\to+\infty}U_1(n)=\lim_{n\to+\infty}[(1-e^{-n})+(-ne^{-n})]=1-0-0=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}U_2(n)=\lim_{n\to+\infty}2U_1(n)-n^2e^{-n}=2-0=2$$

3) $U_p(n)=\int_0^n x^pe^{-x}dx$

Posons $u=x^p$ et $v'=e^{-x}$, on aura:
$u'=px^{p-1}$ et $v=-e^{-x}$, ce qui donne

$$U_p(n)=-x^pe^{-x}\Big|_0^n+p\int_0^n x^{p-1}e^{-x}dx=-n^pe^{-n}+p\mathrm{U}_{\mathrm{p-1}}(n)$$

$$\lim_{n\to+\infty}U_p(n)=\lim_{n\to+\infty}[-n^pe^{-n}+pU_{p-1}(n)]=$$

$$-\lim_{n\to+\infty}n^pe^{-n}+p\lim_{n\to+\infty}U_{p-1}(n)=0+p\times\lim_{n\to+\infty}U_{p-1}(n)=p\times\lim_{n\to+\infty}U_{p-1}(n)$$

En raisonnant de la même façon on aura ;

$$\lim_{n\to+\infty}U_{p-1}(n)=(p-1)\lim_{n\to+\infty}U_{p-2}(n)$$

Donc $\lim_{n\to+\infty}U_p(n)=p\times(p-1)\times\lim_{n\to+\infty}U_{p-2}(n)$

Et ainsi de suite, d'ou :

$$\lim_{n\to+\infty}U_p(n)=p\times(p-1)\times\ldots\ldots\times2\times\lim_{n\to+\infty}U_1(n)$$

$$=p\times(p-1)\times\ldots\ldots\times2\times1=p!$$

II-1) p_1, p_2 et p_3 sont proportionnelles a 1, 2 et 3

d'où : $\frac{p_1}{1}=\frac{p_2}{2}=\frac{p_3}{3}=k$ et comme $p_1+p_2+p_3=1$, on aura :

$k+2k+3k=1$, ce qui donne $k=\frac{1}{6}$, et par suite :

$p_1=\frac{1}{6}, p_2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} et\ p_3=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

2) a- $p(R/U_1)=\frac{1}{5}$ car U_1 contient 5 boules dont une seule est rouge.

b- $p(R\cap U_1)=p(U_1)\times p(R/U_1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$

c- $p(R)=p(R\cap\Omega)=p(R\cap(U_1\cup U_2\cup U_3))$

$=p((R\cap U_1)\cup(R\cap U_2)\cup(R\cap U_3))$

$=p(R\cap U_1)+p(R\cap U_2)+p(R\cap U_3)$

Or: $p(R\cap U_2)=p(U_2)\times p(R/U_2)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{6}$

$p(R\cap U_3)=p(U_3)\times p(R/U_3)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}$, d'où

$p(R_1)=p(R\cap U_1)+p(R\cap U_2)+p(R\cap U_3)=\frac{1}{30}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}=\frac{11}{20}=0{,}55$

d- On a : p(U_1/R)= $\frac{p(U_1\cap R)}{p(R)}=\frac{1}{30}\times\frac{20}{11}=\frac{20}{30\times 11}=\frac{2}{33}$

III-1) a- On a :

$$h'(x)=\frac{[f(x)-g(x)]}{f(x)-g(x)}=\frac{f'(x)-g'(x)}{f(x)-g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)-g(x)}=-1$$

Donc $h'(x)$ est une constant, soit $h(x)=-x+k$

b- Graphiquement on voit que (C) passe par le point (0 ; 1) et (Γ) passe par l'origine (0 ; 0), donc $f(0)=1$ et $g(0)=0$, ce qui donne : $h(0)=\ln[f(0)-g(0)]=\ln 1=0$ et d'autre part on a $h(0)=k$, d'où $k=0$ et par suite $h(x)=-x$.

D'où : $f(x)-g(x)=e^{-x}$

2) a-$U_n=\int_{n-1}^{n}[f(x)-g(x)dx]=\int_{n-1}^{n}e^{-x}dx=[-e^{-x}]_{n-1}^{n}$

$=-[e^{-n}-e^{-(n-1)}]=e^{-(n-1)}-e^{-n}=e^{-n+1}-e^{-n}=e^{-n}(e-1)$

b- On a : $U_{n+1} = (e-1)e^{-(n+1)} = (e-1)e^{-n} \times e^{-1} = \frac{e-1}{e}e^{-n} = \frac{U_n}{e}$

Donc (U_n) est une suite géométrique de 1er terme

$U_1 = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$ et de raison $q = \frac{1}{e}$

c- $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$ est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique du 1er terme $U_1 = (1 - \frac{1}{e})$ et de raison $q = \frac{1}{e}$

Donc $S_n = U_1 \frac{1-q^n}{1-q} = (1-\frac{1}{e})\frac{1-(\frac{1}{e})^n}{(1-\frac{1}{e})} = 1 - e^{-n}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$

d- S_n > 0.99 donne $1-e^{-n}$ >0.99, soit e^{-n} <0.01, d'où:

-n < ln(0,01), soit –n<ln $(\frac{1}{100})$, ce qui donne –n < -ln 100 et par suite n > ln(100) ou n >4,605.

Soit donc $n \geq 5$ car n est un entier naturel. La plus petite de ces valeur est donc p = 5.

$S_5 = 1 - e^{-5} = 0{,}9932620$ Un encadrement de S_5 a 10^{-3} est donc 0,993< S_5 <0,994.

3) a- Puisque $f'(x) = g(x)$ et $g'(x) = f(x)$ On aura $f''(x) = g'(x) = f(x)$ et par suite $f''(x) - f(x) = 0$

Ou $y'' - y = 0$. De même on a

$g''(x) = f'(x) = g(x)$. Ce qui donne $y'' - y = 0$

Donc f est g sont solutions de l'équation différentielle $y'' - y = 0$

b- L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $r^2 - 1 = 0$, qui a pour solutions

$r_1 = 1$ et $r_2 = -1$, donc la solution générale de (E) est $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

Or $f(0) = 1$ donne $C_1 + C_2 = 1$

D'où $y' = C_1e^x - C_2e^{-x}$ et comme g(0) = f'(0)=0 on aura:0= $C_1 - C_2$ ce qui donne $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ et comme $g(x) = f'(x)$ on aura $g(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

4) *f* est pair, donc $f(-x) = f(x)$ et g est impaire donc $g(-x) = -g(x)$ ce qui donne $f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x) = e^{-x}$ cette relations donne $f(x) + g(x) = e^{x}$

Alors $f(x) = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}$ et $g(x) = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}$

IV-A

1) a- On a $b \neq 0$, $M_0 = O$ et $M_n = T(M_{n-1})$ pour $n = 1$, on aura

$z_1 = az_0 + b = a \times 0 + b = b = b \times \frac{1-a^1}{1-a}$, donc la relation est vérifiée pour $n = 1$

Supposons la relation vraie jusqu'à l'ordre n et démontrons qu'elle reste vraie pour n+1.

En effet : $z_{n+1} = az_n + b = a[b\frac{1-a^n}{1-a}] + b = \frac{ab(1-a^n) + b(1-a)}{1-a} = \frac{b - ba^{n+1}}{1-a} = b\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Donc la relation est vraie pour tout $n \geq 1$

b- Si $|a| < 1$ $alors$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ par suite $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \frac{b}{1-a}$ $donc\ \ell = \frac{b}{1-a}$

c- Le point L (ℓ) est le point invariant de T.

2) a- La forme complexe de T est $z' = az + b$ donc T est une similitude plane directe.

Or $a = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha = e^{i2\alpha}$ donc, $|a| = 1$ et $\arg(a) = 2\alpha$, ce qui fait que le rapport de T est 1 et son angle est 2α. Le centre de T est le point invariant L, d'affixe

$$l = \frac{b}{1-a} = \frac{2\sin\alpha}{1 - \cos 2\alpha - i\sin 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{2\sin^2\alpha - 2i\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha - i\cos\alpha} = \sin\alpha + i\cos\alpha$$

Donc T est une rotation de centre le point L ($\sin\alpha;\cos\alpha$) et d'angle 2α.

b- Puisque T est une rotation de centre L est d'angle 2α alors:

$M_0 \xrightarrow{T} M_1 \xrightarrow{T} M_2 ....M_{n-1} \xrightarrow{T} M_n$

Donc L $M_0 = LM_1 = LM_2 = ... = LM_n$

Or $LM_0 = LO$ car $M_0 = O$ par suite $OL = |\ell| = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Donc $LO = LM_1 = LM_2 = ... = LM_n = 1$

Les points $M_n(z_n)$ se trouvent sur un même cercle de centre L et de rayon 1. Ce cercle passe par O car LO = 1.

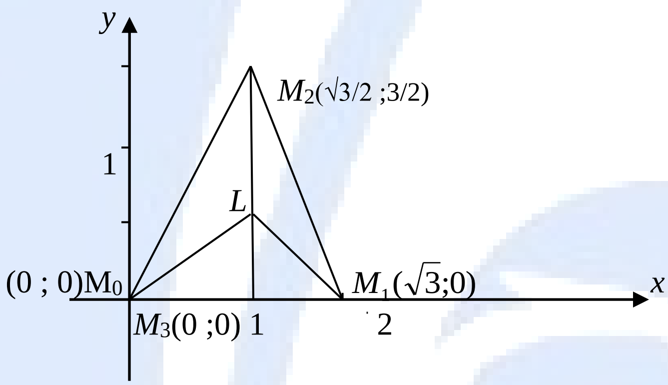
c- $\alpha = \frac{\pi}{3}$ donne: $a = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$b = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ $d'ou: z_0 = 0,\ z_1 = az_0 + b = \sqrt{3}$

$z_2 = az_1 + b = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$$z_3 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) + \sqrt{3} = 0$$

Donc $M_0 = O$, $M_1(\sqrt{3};0)$, $M_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$, $M_3 = O$

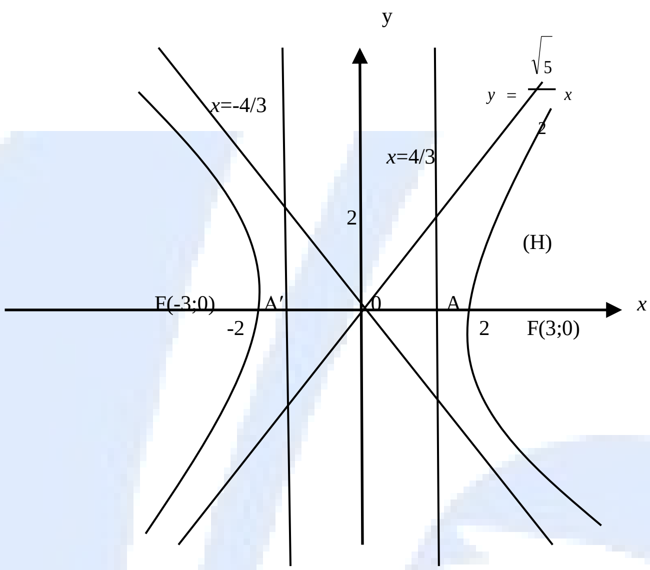


B. 1) On a $a = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc T est une similitude plane directe de centre O, car $b = 0$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

2) Le centre de (H) est O (0 ; 0)

Pour $y = 0$ on aura $\frac{x^2}{4} = 1$, $x = 2$ *ou* $x = -2$, donc les sommets de (H) sont A(2; 0) et A'(-2; 0)

Les asymptotes de (H) sont $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ *et* $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$



b- On sait que $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 5 = 9$ donc $c = 3$ d'où $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

Les foyers de (*H*) sont: *F*(*c*; 0) et *F´*(-*c*; 0) donc *F* (3; 0) et *F´*(-3; 0)

Les directrices sont respectivement : $x = \frac{a^2}{c} = \frac{4}{3}$ et $x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{4}{3}$

D'où *F* (3; 0) et la directrices associée est $x = \frac{a^2}{c} = \frac{4}{3}$

3) a-On a $z' = (1 + i)\, z$ ce qui donne ; $z = \frac{z'}{1+i}$ d'où

$$x + iy = \frac{x' + iy'}{1+i} = \frac{(x'+iy')(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{x' + y' + i(y' - x')}{2}$$

Ce qui donne : $x = \frac{x' + y'}{2}$ *et* $y = \frac{y' - x'}{2}$

En remplaçant x et y par leurs valeurs dans (H) on aura :

$\frac{(x'+y')^2}{16} - \frac{(y'-x')^2}{20} = 1$ ce qui donne $x'^2 + y'^2 + 18x'y' = 80$

Donc l'image de (H) est la courbe (H′) d'équation :

$x^2 + y^2 + 18xy = 80$

b- On a $NK = \frac{|3x+3y-8|}{\sqrt{9+9}} = \frac{|3x+3y-8|}{3\sqrt{2}}$

$NF_1^{\ 2} = (x-3)^2 + (y-3)^2$

$4NF_1^{\ 2} = 9NK^2$ donne $x^2 + y^2 + 18xy = 80$ donc les points N variant sur la courbe (H′)

c- $\frac{NF_1}{NK} = \frac{3}{2}$, donc N décrit la conique de foyer F_1 , de directrice (Δ) et d'excentricité $e = \frac{3}{2} > 1$

Donc (H′) est l'hyperbole de foyer F_1, de directrice (Δ) et d'excentricité $e = \frac{3}{2}$