UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2014 - 2015
La distribution des notes est sur 25

Mathématiques

Durée : 3 heures
05 juillet 2014

I- (4 pts) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$.

A tout nombre complexe z, $z \neq i$, on associe le nombre complexe z' tel que $z' = \dfrac{-2iz}{z-i}$.

Soit M, M', A, B et C les points d'affixes respectives z, z', i, $-2i$ et $-i$.

1- a) Montrer que $(z'+2i)(z-i)$ est un nombre réel constant à déterminer.

b) Déterminer l'ensemble de M' lorsque M décrit le cercle (γ) de centre A et de rayon 1.

c) M étant donné sur (γ), placer le point M' correspondant.

2- a) Montrer que, pour tout $z \neq i$, $z'+i = \dfrac{-i(z+i)}{z-i}$. En déduire que $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{CM'}) = (\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MC}) - \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

b) Déterminer l'ensemble de M lorsque M' décrit la demi droite $]Ct)$ de vecteur directeur $\vec{u}$.

II- (4 pts) Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère la parabole (P) d'équation $y = \dfrac{1}{4}x^2 + 1$.

1- a) Déterminer le sommet, le foyer et la directrice de (P).

b) Déterminer une équation de la tangente (Δ) à (P) au sommet. Tracer (P) et (Δ).

2- Montrer que la tangente (δ) à (P) au point M d'abscisse a $(a \neq 0)$ coupe (Δ) en un point N d'abscisse $\dfrac{a}{2}$.

3- On considère l'équation (E) : $x^2 - 2\lambda x - \lambda^2 - 1 = 0$ où $\lambda \in IR$.

a) Montrer que, pour tout réel λ, (E) a deux racines distinctes x_1 et x_2 différentes de 0.

b) Soit N_1 et N_2 deux points de (Δ) d'abscisses x_1 et x_2 ; (δ_1) et (δ_2) les tangentes à (P), autres que (Δ), passant par N_1 et N_2 respectivement.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de (δ_1) et (δ_2) en fonction de λ et montrer que, quand λ varie dans IR, L varie sur une parabole (P_0) symétrique de (P) par rapport à une droite à déterminer.

III- (4 pts) Une machine ayant 3 bras B_1, B_2 et B_3 opère de la façon suivante :

Le bras B_1 place un jeton au hasard sur l'une des cases d'une grille de 9 cases, puis successivement les bras B_2 et B_3 font de même sur l'une des cases libres.

7	8	9
4	5	6
1	2	3

On considère les événements suivants :

H : " les 3 jetons sont alignés horizontalement " ; V : " les 3 jetons sont alignés verticalement " ;
D : " les 3 jetons sont alignés en diagonale " ; A : " les 3 jetons sont alignés ".

1- a) Montrer que $p(H)=\dfrac{1}{28}$ et calculer $p(V)$ et $p(D)$. En déduire que $p(A)=\dfrac{2}{21}$.

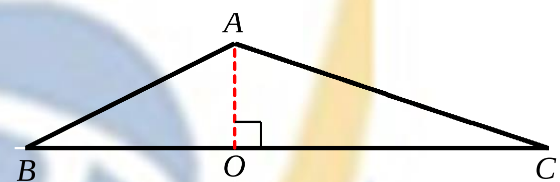
b) Sachant que les 3 jetons sont alignés, calculer la probabilité qu'ils soient alignés horizontalement.

2- On suppose dans cette question que le bras B_1 est déréglé : il place le premier jeton dans l'un des coins de la grille. Soit S l'événement " le bras B_1 est déréglé " . Montrer que $p(A/S)=\dfrac{3}{28}$.

3- On suppose dans cette question qu'on ne sait pas si le bras B_1 est en bon état et que $p(S)=\dfrac{1}{3}$.

La machine opère et donne 3 jetons non alignés. Calculer la probabilité que le bras B_1 soit déréglé.

IV- (6 pts) Dans un plan orienté, on considère un triangle direct ABC tel que $BC=5$, $AB=\sqrt{5}$ et $AC=\sqrt{10}$.



Soit O le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.

Les cercles (γ) et (γ') de centres respectifs B et C passant par A se coupent de nouveau en un point D.

1- Montrer que $\widehat{A}=\dfrac{3\pi}{4}\ rad$ et calculer $\sin\widehat{C}$. En déduire que $OA=1$ et $OC=3$.

2- Soit S la similitude de centre A qui transforme (γ) en (γ') et soit $f=S\circ S$.

a) Déterminer la nature et les éléments de f et placer l'image E de B par f et montrer que $S(C)=E$.

b) Déterminer l'image de (BC) par S et placer les images O' et D' de O et D respectivement par S .

3- Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC). Construire $H'=S(H)$ et montrer que le triangle ACH' est rectangle isocèle.

4- Soit M un point de (γ) autre que A et D, et $M'=S(M)$. Montrer que les points M, D et M' sont alignés.

5- **Le plan est rapporté au repère** $(O\,;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$ **tel que** $\overrightarrow{OC}=3\vec{u}$ **et** $\overrightarrow{OA}=\vec{v}$ **.**

Soit P un point du plan d'affixe $z=x+i\,y$ et P' d'affixe z' son image par S .

a) Montrer que $\dfrac{z'-z_D}{z-z_D}=\dfrac{-x^2-y^2+2x+2y+3}{x^2+(y+1)^2}+\dfrac{x^2+y^2+4x-1}{x^2+(y+1)^2}\,i$.

b) Déduire que, si P est un point de (γ) autre que A et D , alors , P , D et P' sont alignés .

V- (7 pts) ***A-*** On considère l'équation différentielle (1) : $x\,y'+x\,y-y=0$.

On pose $y=x\,z$ où z est une fonction dérivable définie sur IR .

1- Déterminer et résoudre l'équation différentielle (2) de solution générale z .

2- Déterminer la solution générale F de (1) et montrer que F a un extremum en une valeur constante de x .

B- On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x e^{2-x}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$.

1- Dresser le tableau de variations de f.

2- a) Soit $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f. Montrer que, pour tout $n \in IN^*$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-x)e^{2-x}$.

b) Montrer que la suite (U_n) définie sur IN par $U_n = f^{(n)}(n+1)$ est géométrique et non monotone.

3- a) Déterminer le point d'inflexion I de (C) et écrire une équation de la tangente (T) en I à (C).

b) Tracer (T), (C) et la courbe (γ) d'équation $y = \ell n\, x$.

4- a) Calculer $\int f(x)\,dx$.

b) Soit α l'abscisse du point d'intersection de (γ) et (C).

Calculer, en fonction de α, l'aire S du domaine limité par (C), (γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$ et montrer que $S = 2e + \alpha - 1 - (\alpha^2 + \alpha + 1)e^{2-\alpha}$ *unités d'aire.*

5- Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[2\ ;+\infty[$ admet une fonction réciproque f^{-1} de domaine de définition à déterminer.

6- On considère la fonction h définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $h(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & si\ x \in]0\ ;2[\\ f(x) & si\ x \in [2\ ;+\infty[\end{cases}$.

Soit (H) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé.

a) Montrer que h est dérivable en 2.

b) Tracer, dans un nouveau repère, la courbe (H) et la tangente à (H) au point L d'abscisse 2.

c) Calculer l'aire du domaine limité par (H), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et les deux droites d'équations $x = 3$ et $y = 3$.

UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2014 - 2015
La distribution des notes est sur 25

Solution de Mathématiques

Durée : 3 heures
05 juillet 2014

EXERCICE 1

1- a) $z' + 2i = \dfrac{-2iz}{z-i} + 2i = \dfrac{2}{z-i}$, alors $(z' + 2i)(z - i) = 2$ est un nombre réel constant.

b) $(z' + 2i)(z - i) = 2$, alors $|z' + 2i| \times |z - i| = 2$.

M décrit le cercle (γ) de centre A et de rayon 1 si et seulement si $AM = 1$; et puisque $|z - i| = 1$;

donc $|z' + 2i| = 2$; et $BM' = 2$.

Finalement, l'ensemble de M' est un cercle (γ') de centre B et de rayon 2 .

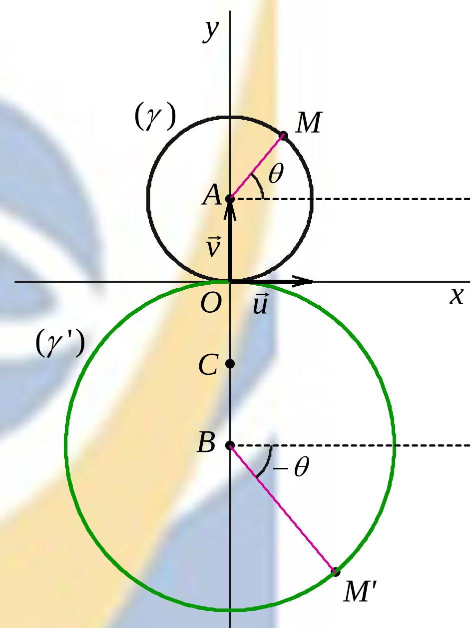


Figure 17

c) $(z' + 2i)(z - i) = 2$, alors $\arg(z' + 2i) + \arg(z - i) = \arg(2)$;

et $(\vec{u} ; \overrightarrow{BM'}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{AM}) = 0 \quad (2\pi)$;

$(\vec{u} ; \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u} ; \overrightarrow{AM}) \quad (2\pi)$.

$M \in (\gamma)$, alors M' est le point de (γ') tel que

$(\vec{u} ; \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u} ; \overrightarrow{AM}) \quad (2\pi)$.

Le dessin,

2- a) $z' + i = \dfrac{-2iz}{z-i} + i = \dfrac{-iz+1}{z-i} = \dfrac{-i(z+i)}{z-i}$.

C est le point d'affixe $-i$.

$z' + i = \dfrac{-i(z+i)}{z-i}$, et puisque $\arg(z' + i) = -\dfrac{\pi}{2} + \arg\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)$;

Alors $(\vec{u} ; \overrightarrow{CM'}) = -\dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MC}) \quad (2\pi)$.

b) M' décrit la demi droite $]Ct)$ de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si $(\vec{u} ; \overrightarrow{CM'}) = 0 \quad (2\pi)$.

$(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MC}) = \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

L'ensemble de M est le demi-cercle de diamètre $[AC]$ privé de A , C et se trouvant à la droite de l'axe des ordonnées.

EXERCICE 2

L'équation $y = \frac{1}{4}x^2 + 1 = f(x)$ est equivalent à $x^2 = 4(y-1)$.

1- a) Le sommet de (P) est le point $S(0\ ;1)$ son axe focal est l'axe des ordonnées ; le paramètre est $p = 2$;
Son foyer est le point $F(0\ ;2)$ et la directrice est la ligne droite de l'équation $y = 0$.

b) La tangente (Δ) à (P) au sommet S est la ligne droite de l'équation $y = 1$.
Le dessin,

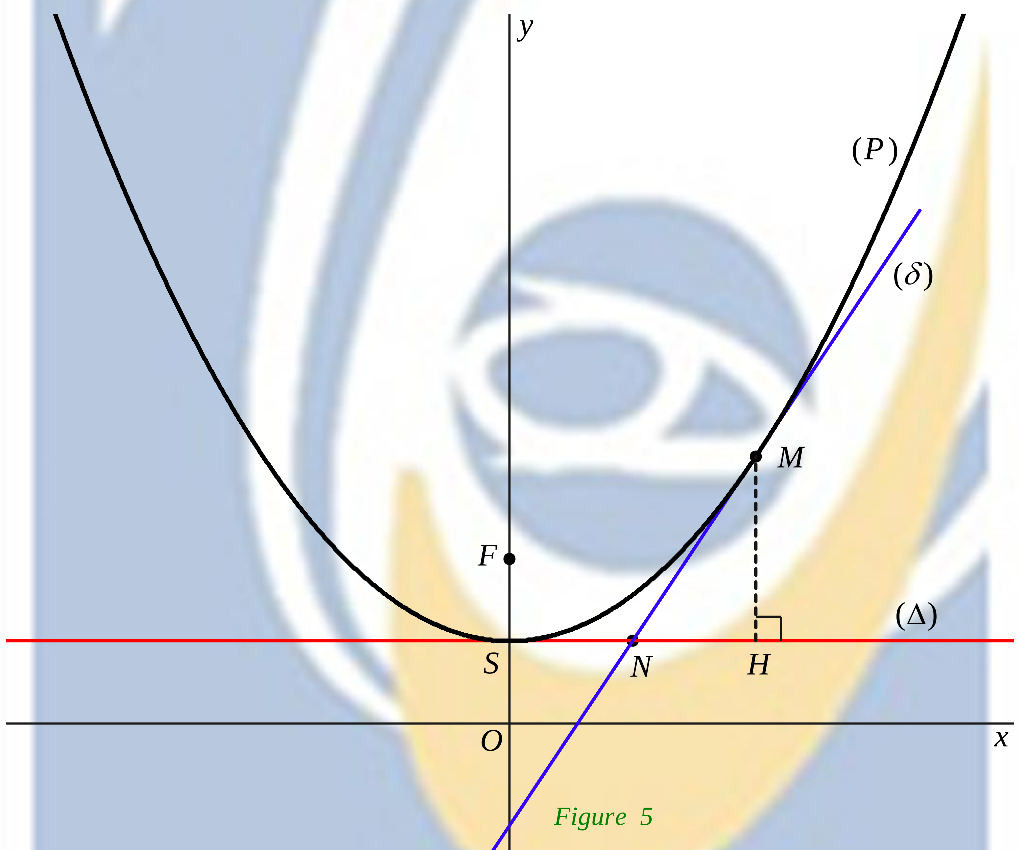


Figure 5

2- Le point de (P) avec abscisse a est $M(a\ ;1+\frac{a^2}{4})$.

Ensuite $f'(x) = \frac{1}{2}x$ alors la pente de la tangente (δ) de (P) à M est égale à $\frac{a}{2}$.

L'équation de (δ) est $y = \frac{a}{2}(x-a) + 1 + \frac{a^2}{4}$ ce qui implique que $y = \frac{a}{2}x + 1 - \frac{a^2}{4}$

(δ) coupe (Δ) au point N d'ordonnée 1 et d'abscisse $x = \frac{a}{2}$.

UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

3- $(E)\ :\ x^2-2\lambda x-\lambda^2-1=0$ où $\lambda \in IR$.

a) Pour tout λ en IR, (E) est une équation quadratique comportant $\Delta' = \lambda^2+\lambda^2+1 = 2\lambda^2+1$.

Pour tout λ en IR, $\Delta' > 0$ et $c=-\lambda^2-1\neq 0$, puis on a deux racines distinctes x_1 et x_2 différent de 0 .

b) N_1 et N_2 sont deux points de (Δ) d'abscisses x_1 et x_2 .

Les points des contacts de (δ_1) et (δ_2) de (P) sont les points des abscisses $2x_1$ et $2x_2$ respectivement.

Ces points sont $M_1(2x_1\ ; 1+x_1{}^2)$ et $M_2(2x_2\ ; 1+x_2{}^2)$ alors les tangentes de (P) à M_1 et M_2 sont $(\delta_1)\ :\ y=x_1\,x+1-x_1{}^2$ et $(\delta_2)\ :\ y=x_2\,x+1-x_2{}^2$.

Les coordonnées du point de leur point d'intersection L sont $x=x_1+x_2=2\lambda$ et $y=x_1\,x_2+1=-\lambda^2$

comme λ varies dans IR, Les coordonnées de L varie de sorte que $y=-\dfrac{1}{4}x^2$, alors L varies sur

le parabole (P_0) d'équation $y=-\dfrac{1}{4}x^2=g(x)$.

Pour tout x dans IR, $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{4}x^2+1-\dfrac{1}{4}x^2=1$, alors (P_0) est le symétrique de (P) par

rapport à la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$.

<u>EXERCISE 3</u>

1- Les 3 bras fonctionnent de façon indépendant, alors la probabilité d'un évènement concernant la position des 3 jetons est le produit des 3 probabilités p_1 , p_2 et p_3 , puis les bras A_1, A_2 et A_3 placent successivement les jetons dans les cases convenant.

a) ▪ $p(H)$

Pour A_1 , tous les cases sont favorables , alors $p_1=1$.

Pour A_2 , tous les 8 cases libres sont possibles mais seulement les 2 cases libres de la ligne correspondant sont favorables , alors $p_2=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$.

Pour A_3 , tous les 7 cases libres sont possibles mais seulement les cases libres de la ligne correspondant sont favorables , alors $p_3=\dfrac{1}{7}$.

Ensuite, $p(H)=1\times\dfrac{2}{8}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{28}$.

▪ Les memes pour $p(V)=\dfrac{1}{28}$.

▪ Pour que l'évènement D est réalisé, il y a deux cases sont possibles :

♠ A_1 place le premier jeton sur l'un de 4 coins des cases, alors $p_1 = \frac{4}{9}$.

De même pour , $p_2 = \frac{1}{4}$ et $p_3 = \frac{1}{7}$.

♠ A_1 place le premier jeton sur le case central, alors $p_1 = \frac{4}{9}$.

Pour A_2 , tous les 8 cases libres sont possibles mais seulement les 4 coins des cases sont favorables , alors $p_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

De même pour , $p_3 = \frac{1}{7}$.

Ensuite , $p(D) = \frac{4}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{63} + \frac{1}{126} = \frac{1}{42}$.

▪ $A = H \cup V \cup D$ ou H , V et D sont incompatible en pairs , alors

$p(A) = p(H) + p(V) + p(D) = \frac{2}{21}$.

b) La probabilité demander est $p(H / A) = \frac{p(H \cap A)}{p(A)} = \frac{p(H)}{p(A)} = \frac{3}{8}$

2- A_1 est dispobnible en stock

Pour A_1 , les cases possibles sont les 4 coins de la grille ou l'un des coins et tous ceux coins sont favorables, alors $p_1 = 1$.

Pour A_2 , tous les 8 cases libres sont possibles mais seulement 2 entre eux ne sont pas favorable (par exemple , si le premier jeton est placé dans le case 1, seulement les cases 6 et 8 ne sont pas favorable) ,

Ensuite $p_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Alors $p(A / S) = 1 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{3}{28}$.

3- La probabilité demander est $p(S / \overline{A}) = p(\overline{A} / S) \times \frac{p(S)}{p(\overline{A})} = \left(1 - p(A/S)\right) \times \frac{p(S)}{1 - p(A)}$

Alors, $p(S / \overline{A}) = \left(1 - \frac{3}{28}\right) \times \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{21}} = \frac{25}{76}$.

UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

EXERCISE 4

A- 1- ▪ Dans le triangle ABC on a $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB\times AC\cos\hat{A}$ alors

$$\cos\hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\times AC} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ ; ensuite }\hat{A} = \frac{3\pi}{4}\ rad\ .$$

▪ Dans le triangle ABC on a $\frac{\sin\hat{C}}{AB} = \frac{\sin\hat{A}}{BC}$ alors $\sin\hat{C} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

▪ Dans le triangle OAC on a $OA = AC\sin\hat{C} = 1$ et $OC = \sqrt{AC^2 - OA^2} = 3$.

2- (γ) est le cercle de centre B et de rayon $R = BA$ et (γ') est le cercle de centre C et de rayon $R' = CA$.

a) Le rapport de S est $k = \frac{R'}{R} = \sqrt{2}$;

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$, alors $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ est un angle de S.

$S = similitude\ (A\ ;\sqrt{2}\ ;\frac{3\pi}{4})$ alors $f = S\circ S = similitude\ (A\ ;\left(\sqrt{2}\right)^2 ;\ 2\times\frac{3\pi}{4})$; C'est-à-dire

$f = similitude\ (A\ ;\ 2\ ;\ -\frac{\pi}{2})$.

$E = f(B)$; le point E est tel que $AE = 2\,AB$ et $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AE}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

$E = f(B) = S\circ S(B) = S(S(B))$ ou $S(B) = C$ donc $E = S(C)$.

b) ▪ $S(B) = C$ et $S(C) = E$, alors $S\big((BC)\big) = (CE)$.

O est la projection orthogonal de A sur (BC) et $S(O) = O'$, donc O' est la projection orthogonal de A sur (CE).

▪ $S(D) = D'$ ou D est le symétrique de A par rapport à (BC) alors D' est le symétrique de A par rapport à (CE).

Notez que $D\in(\gamma)$ et $S\big((\gamma)\big) = (\gamma')$ donc $D'\in(\gamma')$.

3- H est le projeté orthogonal de B sur (AC) et $H' = S(H)$ alors H' est la projection orthogonale de $S(B)$ sur $S(AC)$; donc H' est la projection orthogonale de C sur (AE) .

Le triangle ABH est un triangle rectangle isocèle en H puis $B\hat{A}H = \pi - B\hat{A}C = \frac{\pi}{4}\ rad$, alors l'image ACH' du triangle ABH est un triangle rectangle isocèle en H'.

4- M est un point de (γ) distincte de A et D, et $M' = S(M)$. Soit $A\hat{D}M = \theta\ rad$.
Une similitude préserve les angles, alors $A\hat{D}'M' = \theta\ rad$.

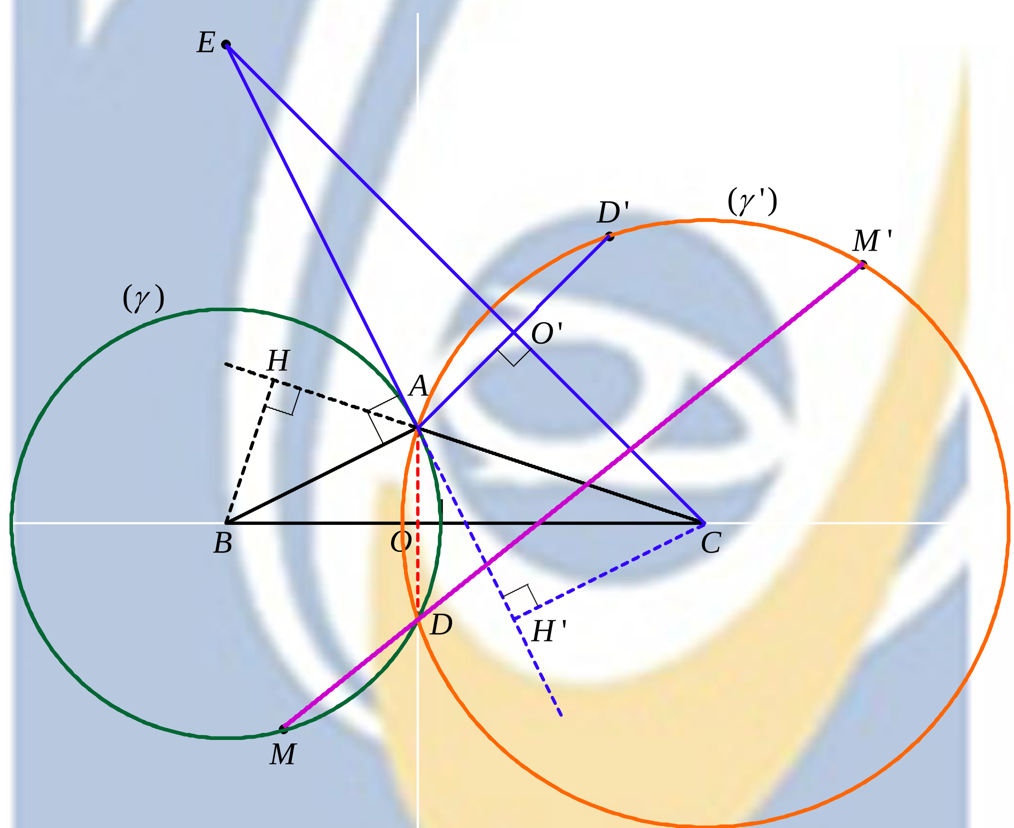
UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Le quadrilatéral $ADM'D'$ est cyclique donc $A\widehat{D}M' + A\widehat{D'}M' = \pi \ rad$.
Ensuite, $A\widehat{D}M + A\widehat{D}M' = \pi$. d'où les points M , D et M' sont colinéaires .

Déterminer la forme algébrique du rapport $\dfrac{z'-z_D}{z-z_D}$ en terme de x et y et démontrer que si M est un point de (γ) autre que A et D alors M , D et M' sont colinéaires .



5- **Le plan est rapporté au repère** $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$ **tel que** $\overrightarrow{OC} = 3\vec{u}$ **et** $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$ **.**

a) La relation complexe de S est à la forme $z' = az + (1-a)z_A$ ou $a = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1+i$

alors $z' = (-1+i)z + (2-i)i = (-1+i)z + 1 + 2i$.

$$\frac{z'-z_D}{z-z_D} = \frac{(-1+i)z+1+2i+i}{z+i} = \frac{(-1+i)z+1+3i}{z+i} \times \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}-i}$$

$$\frac{z'-z_D}{z-z_D}=\frac{(-1+i)\,z\,\bar{z}+(1+i)\,z+(1+3i)\,\bar{z}+3-i}{|\,z+i\,|^2}$$

$$\frac{z'-z_D}{z-z_D}=\frac{(-1+i)(x^2+y^2)+(1+i)(x+i\,y)+(1+3i)(x-i\,y)+3-i}{x^2+(y+1)^2}$$

$$\frac{z'-z_D}{z-z_D}=\frac{-x^2-y^2+2x+2y+3}{x^2+(y+1)^2}+\frac{x^2+y^2+4x-1}{x^2+(y+1)^2}\,i\ .$$

b) Si M est un point de (γ) distincte de A et D donc $BM=\sqrt{5}$; puis $(x+2)^2+y^2=5$.

La partie imaginaire de $\frac{z'-z_D}{z-z_D}$ est $Y=\frac{x^2+y^2+4x-1}{x^2+(y+1)^2}=\frac{(x+2)^2+y^2-5}{x^2+(y+1)^2}=0$; donc $\frac{z'-z_D}{z-z_D}$ est un nombre purement réel.

Ensuite, les 3 points M , D et M' sont colinéaires .

EXERCISE 5

A- 1- Si $y=x\,z$, alors $y'=z+x\,z'$.

Par substitution dans l'équation (1) on obtient $x\,z+x^2\,z'+x^2\,z-x\,z=0$; puis $z'+z=0$ (2).

2- la solution générale de l'équation (2) est $z=C\,e^{-x}$; et que dans (1) est F tel que $F(x)=C\,x\,e^{-x}$.

$F'(x)=C\,e^{-x}-C\,x\,e^{-x}=C\,(1-x)\,e^{-x}$.

Pour toutes les valeurs de C, le polynôme $1-x$ change le signe à 1.

Ensuite , F a un extremum en une valeur constante de $x=1$.

B- la fonction f définie sur IR par $f(x)=x\,e^{2-x}$.

1- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2-x}=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^2\,\frac{x}{e^x}=0$.

$f'(x)=e^{2-x}-x\,e^{2-x}=(1-x)\,e^{2-x}$.

Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Figure 41

2- a) ▪ $f'(x) = (1-x)e^{2-x} = (-1)^{1+1}(1-x)e^{2-x}$.

▪ Si , pour un certain $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-x)e^{2-x}$ alors

$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(-1) + (-1)^{n+1}(n-x)e^{2-x}\ f^{(n)}$; puis $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-x)e^{2-x}$.

Ensuite , pour tout nombre naturelle $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-x)e^{2-x}$.

b) La suite (U_n) est définie pour tout n sur IN^* , par $U_n = f^{(n)}(n+1) = (-1)^n e^{1-n}$

Pour tout n sur IN , $U_{n+1} = (-1)^{n+1}e^{-n} = -e^{-1} \times U_n$, alors (U_n) est un suite géométrique de rapport commun $r = -e^{-1}$ et de premier terme $U_1 = -1$.

Alors $r < 0$ donc (U_n) est non monotone.

3- a) $f''(x) = (-1)^3(2-x)e^{2-x} = (x-2)e^{2-x}$.

$f''(x)$ change le signe en 2 , alors le point $I(2\,;\,2)$ est un point d'inflexion de (C) .

Une équation de la tangent (T) de (C) à I est $y = f'(2)(x-2) + f(2)$; donc (T) : $y = -x + 4$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, puis l'axe des abscisses est asymptote de (C) à $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^2 e^{-x} = +\infty$ alors, (C) a une direction parallèle asymptotique à $y'y$ de $-\infty$.

Tracer (T) , (C) et (γ) .

UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

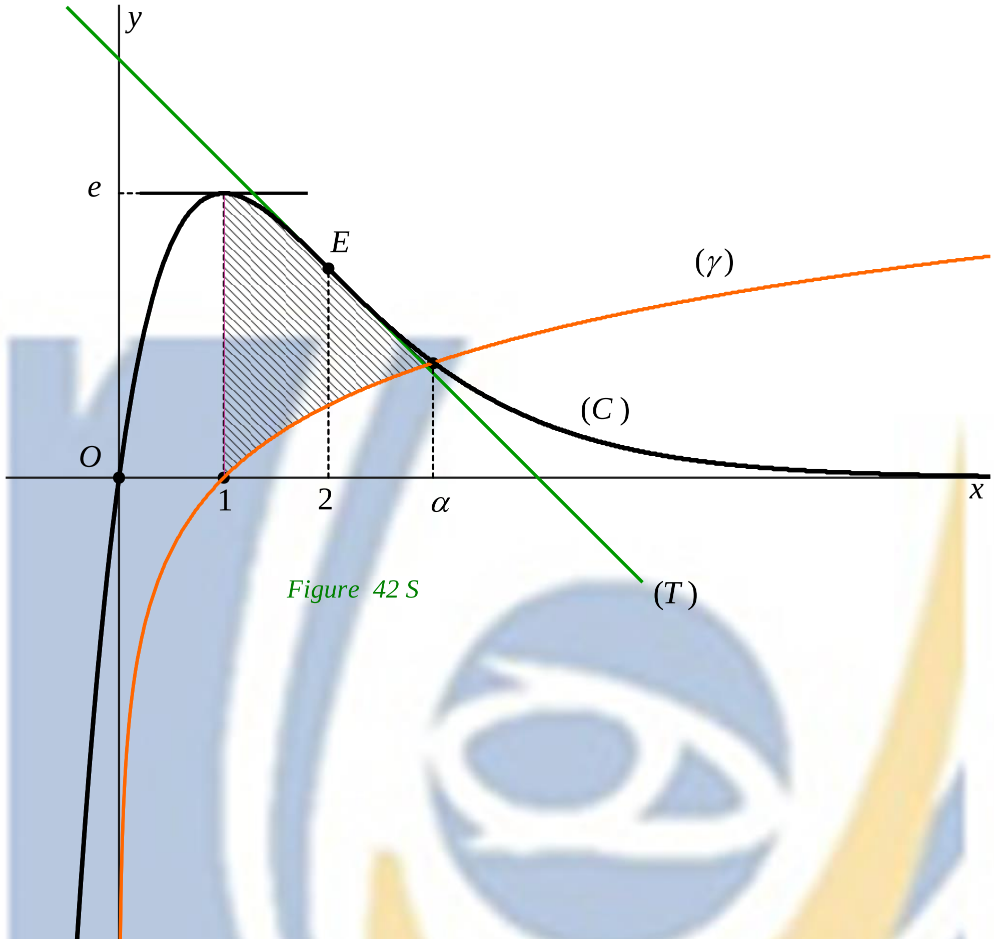


Figure 42 S

4- a) Soit $u = x$ et $v' = e^{2-x}$, alors $u' = 1$ et $v = -e^{2-x}$

$$\int f(x)\,dx = \int x e^{2-x} dx = -x e^{2-x} + \int e^{2-x} dx = -(1+x)e^{2-x} + C\ .$$

b) Dans l'intervalle $]1\,;\alpha[$, (γ) se trouve au-dessous de (C), alors l'aire demander de S est tel que

$$S = \int_1^{\alpha} \big(f(x) - \ell n\, x\big)dx \quad \textit{unites d'aire}$$

$$\int_1^{\alpha} \big(f(x) - \ell n\, x\big)dx = \Big[-(1+x)e^{2-x} - x\,\ell n\, x + x\Big]_1^{\alpha} = -(1+\alpha)e^{2-\alpha} - \alpha\,\ell n\,\alpha + \alpha + 2e - 1\ ;$$ Ensuite

$S = 2e + \alpha - 1 - (1+\alpha)e^{2-\alpha} - \alpha \ell n \alpha$ *unites d'aire*

α est la solution de l'équation $\ell n\, x = f(x)$, alors $\ell n \alpha = \alpha e^{2-\alpha}$; puis

$S = 2e + \alpha - 1 - (1+\alpha)e^{2-\alpha} - \alpha(\alpha e^{2-\alpha}) = 2e + \alpha - 1 - (\alpha^2 + \alpha + 1)e^{2-\alpha}$ *unites d'aire*

5- la restriction de f à l'intervalle $[2\,;+\infty[$ est continue et strictement décroissante puis il a une fonction inverse f^{-1} dont le domaine de définition est $f([2\,;+\infty[)$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f(2) = 2$ alors $f([2\,;+\infty[) =]0\,;2]$.

6- La fonction h est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & si\ x \in]0\,;2[\\ f(x) & si\ x \in [2\,;+\infty[\end{cases}$.

a) La fonction f est dérivable en 2 et $f'(2) = -1$, alors f^{-1} est dérivable en $f(2)$ tel que 2 et $\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{f'(2)} = -1$.

$h_\ell'(2) = \left(f^{-1}\right)'(2) = -1$ et $h_r'(2) = f'(2) = -1$ donc $h_\ell'(2) = h_r'(2) = -1$; ensuite h est dérivable en 2 et $h'(2) = -1$.

b) Un équation de la tangent de (H) à L est $y = h'(2)(x-2) + h(2)$; tel que $y = -x + 4$ qui est la ligne droite de (T) .

(H) se compose de la partie de (C) correspondant à l'intervalle $[2\,;+\infty[$ et sa symétrique par rapport à la ligne droite (δ) de l'équation $y = x$.

tracez (H) et (T) .

c) Par symétrie par rapport à (δ), l'aire demander est le double de l'aire hachurée tel que $\dfrac{1}{2}(2\times 2) + \displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx = 2 - \left[(1+x)e^{2-x}\right]_2^3 = 2 - 4e^{-1} + 3 = 5 - \dfrac{4}{e}$ *unité d'aire* .

l'aire demander est $= 10 - \dfrac{8}{e}$ *unité d'aire* .

UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

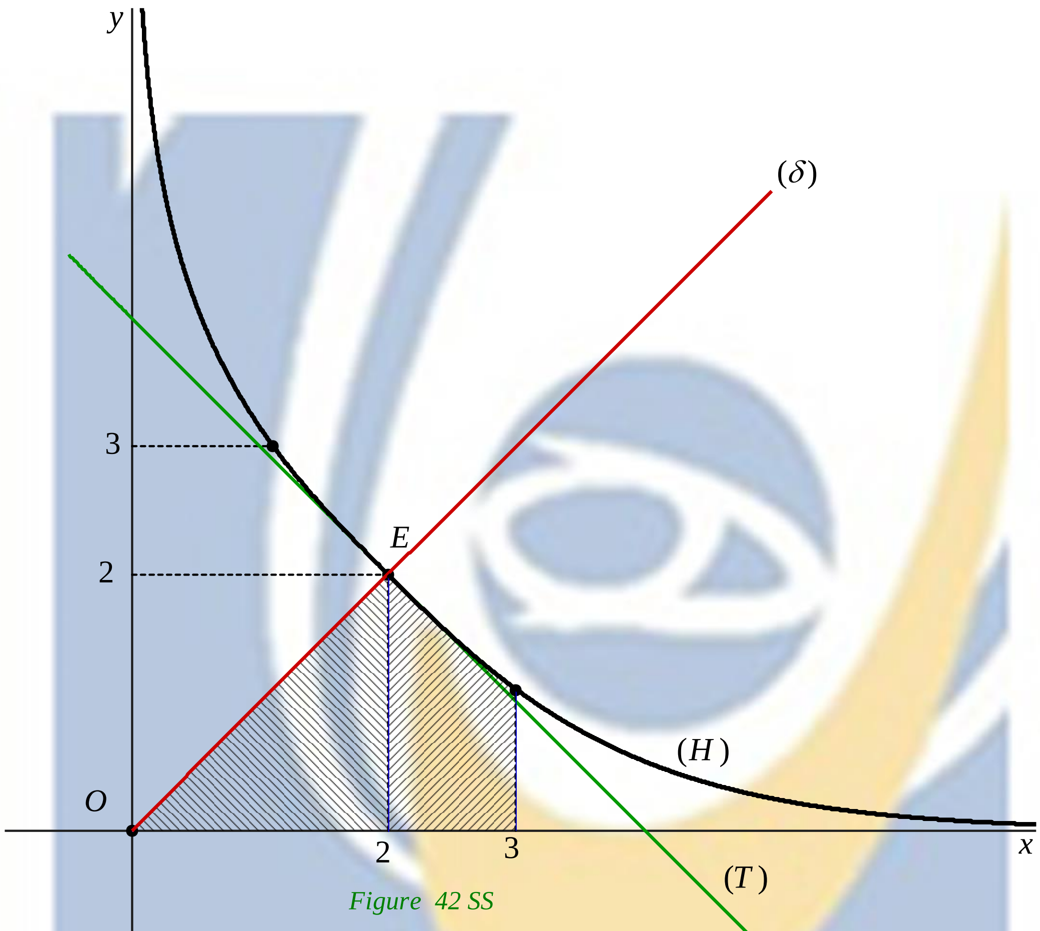


Figure 42 SS

UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة