UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2002-2003 **Composition de Mathématiques** **Durée : 3 heures**
Juillet 2002

Remarque: L'usage d'une calculatrice non-programmable est permis.
La distribution des notes est sur 25

I- (9 points) Les parties A et B sont indépendantes.

On suppose le plan étant rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

A- On considère la fonction f définie, sur $\left]-\infty, 0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$, par $f(x) = x - \ln|x|$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative.

1) a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

b- En déduire une asymptote à (C)

2) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$. Dresser un tableau de variation de *f*.

3) a- Démonter que la droite (d) d'équation $y = x$ est une direction asymptote pour (C)

b- Etudier la position relative de (C) et (d)

4) Tracer (d) et (C) dans le même repère.

5) a- Démontrer que l'équation $x = \ln|x|$ admet une seule racine.

b- Soit α cette racine. Vérifier que $-0{,}568 < \alpha < -0{,}566$. On prend $\alpha = -0{,}567$.

B-1) On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = -2e^{-x}$. On pose $y = ze^{-x}$

a- Démontrer que z vérifie une équation différentielle (E´). Résoudre (E´)

b- Déterminer la solution générale de (E). En déduire la solution particulière de (E) vérifiant : y(0) = -1 et y´(0) = -1

2) On considère la fonction g définie, sur IR, par $g(x) = -(x+1)^2 e^{-x}$ et l'on désigne par (C´) sa courbe représentative.

a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ En déduire une asymptote à (C´)

b-Vérifier que $g'(x) = (x^2 - 1)\ e^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de g. Tracer (C´).

c- Calculer l'aire du domaine limité par (C´), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$. (On cherchera une primitive G de g de la forme $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$).

d-Par une lettre graphique, indiquer, suivant les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation g(x) = k.

C- Démontrer que l'équation $g(x) = \ln|g(x)|$ admet 3 racines dont une seule β est positive. Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

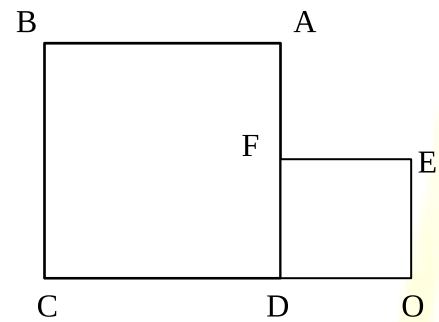
II- (8 points) Les parties A, B et C de ce problème sont indépendantes

Dans un plan orienté (P), on considère la figure ci-contre formée de deux carrés DABC et OEFD tel que DA = L et DF = l .

On désigne par r la rotation de centre D qui transforme A en C,

et par s La similitude directe de centre D, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

et d'angle $+\frac{\pi}{4}$



A-

1) a-Préciser l'angle de r et déterminer r (O).
   b-Déterminer l'angle des deux droites (AO) et (CF).
2) a- Déterminer s (B) et s (E) .
   b- Déterminer l'angle $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF})$.
3) a- Démontrer que le point **I** d'intersection de (CF) et (BE) est un point du cercle circonscrit au carré ABCD.
   b- En déduire la nature du triangle AIC.
   c- Démontrer que les droites (AO), (BE) et (CF) sont concourantes.

B- On considère la suite de points A_1, A_2, A_3 , …..A_i,…..définies par $A_1 = s(A)$, $A_2 = s(A_1)$, $A_3 = s(A_2)$,…. , $A_i = s(A_{i-1})$… On pose $l_1 = AA_1$, $l_2 = A_1A_2$, $l_3 = A_2A_3$, …. $l_i = A_{i-1}A_i$,…

1) Placer, sur la figure, les points A_1 , A_2 , A_3 et A_4.
2) Montrer que la suite de terme générale l_i est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
3) Calculer l_i en fonction de L et i.
4) Montrer que A_8 appartient à [DA].
5) Trouver une relation entre L et l pour que A_8 soit confondu avec F.

C- On suppose (P) rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = -\overrightarrow{OD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OE}$

1) Ecrire les formes complexes de la rotation r et de la similitude s
2) On suppose L = 3. On désigne par (γ) le cercle circonscrit au carré OEFD et (γ′) le cercle circonscrit au carré DABC.
   a- Déterminer l'affixe du centre w de l'homothétie positive h qui transforme (γ) en (γ′).
   b- Écrire la forme complexe de h.

III- (3 points) Dans une école il y a trois classes de terminales : la classe T_1 contient 20 élèves dont 8 filles, la classe T_2 contient 30 élèves dont 10 filles et la classe T_3 contient 40 élèves dont 24 filles. On choisit au hasard une classe et de cette classe on choisit au hasard un élève pour représenter l'école pendant la fête de fin d'année.

1) Quelle est la probabilité de l'évènement A : « l'élève choisi est une fille de T_3 » ?
2) Quelle est la probabilité de l'évènement B : « l'élève choisi est une fille» ?
3) On sait que l'élève choisi est une fille. Quelle est la probabilité qu'il soit de T_3 ?

IV- (5 points) On suppose l'espace rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\vec{k})$ et l'on désigne par (P) le plan d'équation $4x-3z+12=0$

Soit $M\,(X,Y,0)$ un point du plan (xOy).

1- Calculer en fonction de X la distance MH du point M au plan (P) et montrer que si MO = MH, alors X et Y doivent vérifier la relation $9X^2+25Y^2-96X-144=0$
2- Déduire de cette relation que l'ensemble des points, du plan (xOy), équidistants de O et de (P) est une ellipse (E) dont on déterminera le centre, les foyers et l'excentricité.
3- Le plan (P) coupe (xOy) suivant une droite (d).
   a- Ecrire un système d'équations paramétriques de (d).
   b- Montrer que (d) est une directrice de (E).

UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2002-2003 **Solution de Mathématiques** **Durée : 3 heures**
Juillet 2002

I. Partie A

1) a- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{\ln|x|}{x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} -\ln|x| = +\infty$

b- x = 0 est une asymptote a (C)

2) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) a- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln|x|}{x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{\ln|x|}{x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\ln|x|\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\ln|x|\right) = -\infty$

Donc la droite d'équation y = x est une direction asymptotique de (C) en $+\infty$ et en $-\infty$

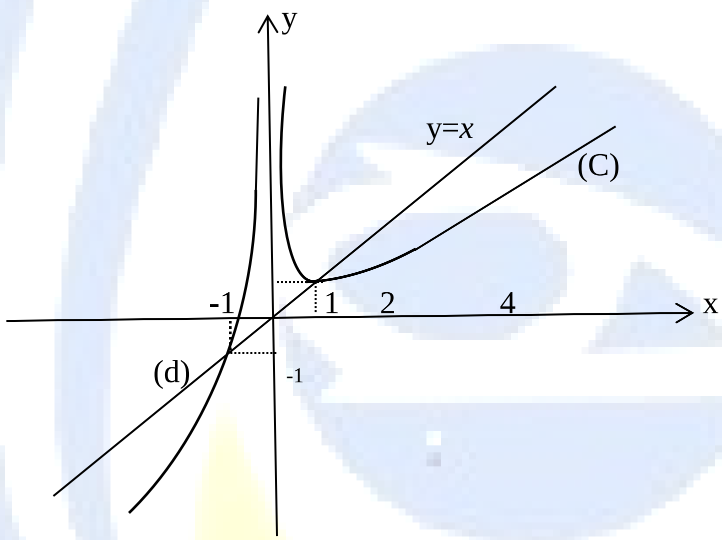
b- On a $f(x) - x = -\ln|x|$ d'où les 3 cas :

(C) est au-dessus de (d) pour $|x|<1$ donc pour -1< x <1 avec $x \neq 0$.

(C) est au-dessous de (d) pour x > 1 ou x < -1.

Donc (d) coupe (C) aux points (1;1) et (-1; -1).

4)



5) a- L'équation $x = \ln|x|$ est équivalente a $x = \ln|x|$ = 0 et a $f(x) = 0$, donc il s'agit d'étudier l'intersection entre (C) et l'axe $x'x$.

Graphiquement on voit que (C) coupe $x'x$ en un seul point d'abscisse négative.

b- On a : $f(-0{,}568) = -0{,}002<0$ et $f(-0{,}566) = 0{,}0031>0$

Donc $-0{,}568 < \alpha < -0{,}566$. Soit $\alpha = -0{,}567$

B-1) a- On a : $y' = e^{-x}(z' - z)$ et $y'' = e^{-x}(z'' - 2z' + z)$

En remplaçant y' et y'' dans (E) on obtient $z'' = -2$ (E′).

Ce qui donne $z' = -2x + a$ et $z = -x^2 + a\,x + b$

b- La solution générale de (E) est y = $(-x^2 + a\,x + b)\,e^{-x}$

$y\,(0) = -1$ donne $b = -1$.

On a $y' = e^{-x}\,(-\,2x + a + x^2 - a\,x - b)$, $y'\,(0) = -1$ donne $a - b = -1$d'ou $a = -2$ et par suite la solution particulière de (E) est : $y = (-x^2 - 2\,x - 1)\,e^{-x} = -(x+1)^2\,e^{-x}$.

2) a- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}[-(x+1)^2 e^{-x}] = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}[\frac{-(x+1)^2}{e^x}] = 0$$

Donc l'axe $x'\,x$ est une asymptote à (C´).

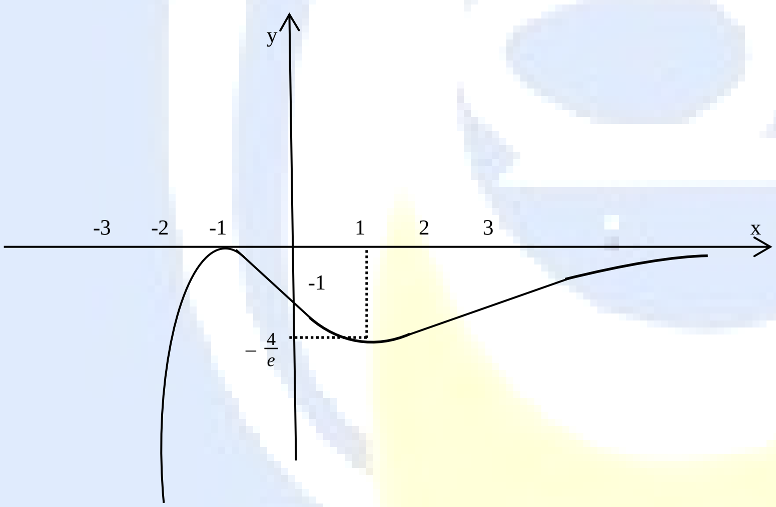
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}[-(x+1)^2\,\frac{e^{-x}}{x}] = +\infty$$

Donc $y'\,y$ est une direction asymptotique pour (C´) en $+\infty$.

b- $g'(x) = -2(x+1)\,e^{-x} + e^{-x}(x+1)^2 = (x^2-1)\,e^{-x}$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{4}{e}$	$\nearrow$	0

$-\dfrac{4}{e} \approx -1{,}471.$



c- $A = -\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)dx,\ \ si\ \ G(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ est une primitive de g on aura

$G'(x) = g(x)$, ce qui donne $-ax^2 - (b-2a)x - (-b+c) = -x^2 - 2x - 1,$

soit $a = 1$; $b = 4$; $c = 5$ et par suite $G(x) = (x^2 + 4x + 5)\,e^{-x}$

D'où $A = -[G(x)]_{-1}^{1} = G(-1) - G(1) = 2e - \dfrac{10}{e}u^2$

d- Soit (d) la droite d'équation $y = k$, parallèle à $x'x$

Si k < $-\frac{4}{e}$ alors (d) coupe (C) en un seul point, donc l'équation a une seule solution.

Si k = $-\frac{4}{e}$, il y a deux racines dont l'une est double x = 1

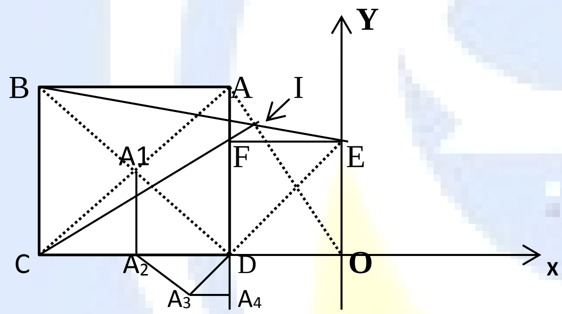
Si $-\frac{4}{e}$ < k < 0 il y a trois solutions.

Si k = 0, il y a une solution double x = -1

Si k > 0, pas de solutions.

C- L'équation $x = \ln|x|$ admet une seule solution négative α = - 0,567 donc $g(x) = \ln|x|$ admet des solution pour g(x) = - 0,567 Or -1< - 0,567 < 0 donc il y a trois valeurs de x dont l'une seule est positive ; $\beta > 1$. Et puisque g(3,63) = - 0,568 et g(3,64) = - 0,565, on déduit que 3,63 < β < 3,64.

II-



A- 1) a- On a ($(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$ et $DA = DC$ donc r est une rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $r = r\left(D, \frac{\pi}{2}\right)$.

r(O) = F, car $DO = DF$ et $(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DF}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

b- On a r(A) = C et $r(O)$= F d'où $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CF}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$ Donc les deux droites (AO) et (CF) sont perpendiculaires.

2) a- On a $\begin{cases} DC = \dfrac{\sqrt{2}}{2} DB \\ (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = \dfrac{\pi}{4} (\bmod 2\pi) \end{cases}$ et $\begin{cases} DF = \dfrac{\sqrt{2}}{2} DE \\ (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = \dfrac{\pi}{4} (2\pi) \end{cases}$

Donc $s(B) = C$ et $s(E) = F$

b- On a $s(B) = C$ et $s(E) = F$, d'ou $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}) = \dfrac{\pi}{4} (2\pi)$

3) a- On a $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{4} (2\pi)$ donc les points *I*, *A*, *B* et *C* sont cocycliques et par suite I est un point du cercle circonscrit au carré *ABCD*

b-[*AC*] est un diamètre du cercle circonscrit au carré *ABCD* donc $\widehat{AIC} = 90^\circ$ et par suite le triangle *AIC* est rectangle en I.

c- (*AI*) est perpendiculaire à (*CF*) et (*AO*) est perpendiculaire à (*CF*) donc *A*, *I*, *O* sont alignés, par suite (*AO*), (*BE*) et (*CF*) sont concourantes en I.

B- 1) a- On a $A_1 = s(A)$, donc A_1 est le milieu de [BD]

$A_2 = s(A_1)$, donc le triangle DA_1A_2 est rectangle isocèle et $A_2 \in (CD)$; A_2 est le milieu de [CD].

$A_3 = s(A_2)$, donc le triangle DA_2A_3 est rectangle isocèle et $A_3 \in (DE)$.

$A_4 = s(A_3)$, donc le triangle DA_3A_4 est rectangle isocèle et $A_4 \in (DA)$;

2) $\ell_i = A_{i-1}A_i$, $donc\, \ell_i = AA_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} DA = \dfrac{\sqrt{2}}{2} L$

Le triangle $DA_{i-1}A_i$ est rectangle isocèle en A_i , d'où :

$\ell_i = \dfrac{\sqrt{2}}{2} DA_{i-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} A_{i-2}A_{i-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ell_{i-1}$ donc (ℓ_i) est une suite géométrique de 1[er] terme

$\ell_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} L$ et de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3) On a $\ell_i = \ell_1 \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)^{i-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} L \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)^{i-1} = L \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)^{i}$

4) On a $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DA_8}) = 8 \times \dfrac{\pi}{4} (2\pi) = 0 (2\pi)\ et\ DA_8 < L$. Donc $A_8 \in [DA]$.

5) $A_8 \equiv F$ donne $A_7 A_8 = \ell_8 = DA_8 = DF$ D'où: $\ell = \ell_8 = L\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8$ $soit\ \ \ell = \frac{L}{16}$

C -1) On a D (-1 ; 0), la forme complexe de r est :

$r:\ z \to Z = az + b,\ avec\ \ a = i \quad et -1 = \frac{b}{1-i};\ b = -1 + i$ D'où Z = iz + i -1.

La forme complexe de s est : s: $z \to Z = az + b$ avec : $a = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{2}$ et

$-1 = \frac{b}{1 - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}}$ $\ soit\ \ b = \frac{i}{2} - \frac{1}{2}$ d'ou $Z = \left(\frac{1+i}{2}\right)z - \frac{1}{2}(1-i)$

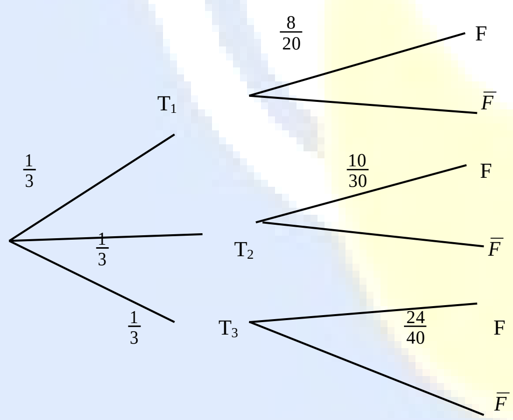
2) a- Le rapport de l'homothétie est k = 3, 1 centre de (γ) est $I\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et le centre de (γ ´) est $I'\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ On a h (I) = $I´$ d'où $\overrightarrow{WI'} = 3\overrightarrow{WI}$ $\ \ donc\ \ z_r - z_w = 3z_1 - 3z_w$ ce qui donne

$2z_w = 3z_1 - 3z_r = 1$, $\ soit\ z_w = \frac{1}{2}$

b- la forme complexe de h est : h: $z \to Z = kz + b\ \ avec\ k = 3\ et \frac{1}{2} = \frac{b}{1-3}$ d'où b = -1

Par suite Z = 3z – 1.

III- 1) On a $p(A) = p(F \cap T_3) = p(T_3).p(F/T_3) = \frac{1}{3} \times \frac{24}{40} = \frac{1}{5}$



2) On a $p(B) = p(F) = p(F \cap T_1) + p(F \cap T_2) + p(F \cap T_3)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{8}{20} + \frac{1}{3} \times \frac{10}{30} + \frac{1}{3} \times \frac{24}{40} = \frac{4}{9}$

3) On a $p(T_3/F)=\dfrac{p(T_3\cap F)}{p(F)}=\dfrac{p(A)}{p(B)}=\dfrac{9}{20}$

IV- 1) On a $MH=\dfrac{|4x+12|}{\sqrt{16+9}}=\dfrac{4}{5}|x+3|$.

MO =MH donne $\overline{MO}^2=\overline{MH}^2$ d'où: $x^2+y^2=\dfrac{16}{25}(x^2+9+6x)=0$ *ou* $9x^2+25y^2-96x-144=0$

2) L'ensemble des points du plan (xOy) équidistants de O et de (P) est la courbe d'équation

$9x^2+25y^2-96x-144=0$ qui est équivalente à : $\dfrac{\left(x-\dfrac{16}{3}\right)^2}{\dfrac{400}{9}}+\dfrac{y^2}{16}=1$

C'est une ellipse de centre $w(\dfrac{16}{3},0)$ et d'axe focal $x'\,x$.

Or $c^2=a^2-b^2=\dfrac{400}{9}-16=\dfrac{256}{9}$ $d'ou$ $c=\dfrac{16}{3}$.

Les foyers sont : $F(\dfrac{16}{3}+\dfrac{16}{3},0)\equiv F(\dfrac{32}{3},0)$ et $F'\left(\dfrac{16}{3}-\dfrac{16}{3},0\right)\equiv F'(0,0)$ et $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\dfrac{16}{3}}{\dfrac{20}{3}}=\dfrac{4}{5}$

3) (d) est l'intersection de (P) et de (xOy), d'où : (d) $\begin{cases}4x-3z+12=0\\ z=0\end{cases}$

a-Un système d'équations paramétriques de (d) est $\begin{cases}x=-3\\ y=m\\ z=0\end{cases}$

b- L'un des foyers est O, on a

$MO=MH=\dfrac{4}{5}|x+3|$ et $d(M;(d))=|x+3|$, $d'ou$ $\dfrac{MO}{d(M,(d))}=\dfrac{\dfrac{4}{5}|x+3|}{|x+3|}=\dfrac{4}{5}=e$

Donc (d) est une directrice de (E) associée au foyer O.