UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2001-2002 **Composition de Mathematiques** **Durée: 3 heures**
Juillet 2001

Remarque: *L'usage d'une calculatrice non programmable est permis.*
La répartition des notes est sur 25 points.

I- (2 points)

Résoudre l'inéquation $\ln\left(\dfrac{x+1}{5-x}\right) > \ln(2x-3)$

II- (5points)

On suppose le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. En désigne par A le point d'affixe 1, par B le point d'affixe i , par (C) le cercle de center O et de rayon 1 et par (D) la droite d'équation y = 1.

A tout point *M* d'affixe z ≠ i, on associe le point *M´* d'affixe z´ = $\dfrac{z-i}{\bar{z}+i}$

1) Déterminer l'ensemble des points *M* d'affixe z tel que z´ = 1.
2) Montrer que z´ $\bar{z}'$ = 1. Interpréter géométriquement le résultat.
3) a- Montrer que, pour tout point M n'appartenant pas à (*D*), $\dfrac{z'-1}{z-i}$ est un imaginaire pur.

   b- Démontrer que les deux droites (*AM´*) et (*BM*) sont perpendiculaires.
   c- *M* étant un point donné n'appartenant pas à (*D*), construire géométriquement le point M´.
   d- Préciser la position de *M´* lorsque *M* appartient à la droite (*D*) privée de *B*.

III- (5 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère la suite des points: A_0 , A_1 ,…., A_n , A_{n+1} ,..., d'affixes respectives z_0 , z_1 , …, z_n , z_{n+1} , …, définie par :

$z_0 = 0$ et $z_{n+1} = \dfrac{1}{1+i} z_n + i$ (n entier naturel)

1) Montrer que, quel que soit n, A_{n+1} est l'image de A_n par une similitude directe dont on déterminera le center I, le rapport k et l'angle α .

2) a- Montrer que, quel que soit n, le triangle $IA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} .
   b- Déduire une construction de A_{n+1} à partir de A_n et placer les points A_0 , A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 (pour faire la figure et uniquement dans ce but, on prend comme unité graphique 4 cm).

3) On pose a_k = aire ($IA_k\ A_{k+1}$) et $S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

a- Montrer que la suite de terme général a_k est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b- Calculer S_n en fonction de n et déterminer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

IV- (4 points)

On dispose de 3 urnes U_1 , U_2 et U_3 , contenant chacune 6 boules :

U_1 contient 2 boules bleues et 4 boules rouges.

U_2 contient 3 boules bleues et 3 boules rouges.

U_3 contient 5 boules bleues et 1 boule rouge.

1) *Dans cette partie, on considère l'urne* U_1 . On en tire, au hasard, une boule. On effectue cette opération 5 fois en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne U_1 .

a- Quelle est la probabilité d'obtenir 4 boules bleues et 1 boule rouge dans l'ordre suivant : bleue, bleue, bleue, bleue, rouge ?

b- Quelle est la probabilité d'obtenir 4 boules bleues et 1 boule rouge dans n'importe quel ordre?

c- Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule bleue?

2) *Dans cette partie, on choisit au hasard, une des 3 urnes* U_1 , U_2 , U_3 , et on tire au hasard une boule

a- Quelle est la probabilité d'obtenir une boule bleue?

b- On sait que la boule tirée est bleue: quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_3 ?

V- (9 points)

A- On considère la fonction f , définie sur] 0, + ∞ [, par $f(x) = \dfrac{x-1}{x}(\ln x - 2)$ et l'on désigne par(C) sa courbe représentative relativement au repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

2) Montrer que f est dérivable sur] 0, + ∞ [et que $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}(\ln x + x - 3)$

3) Soit g la fonction définie sur] 0, + ∞ [par $g(x) = \ln x + x - 3$

a- Etudier les variations de g .

b- Montrer que $g(x) = 0$ possède une solution unique α et que $2.20 < \alpha < 2.21$.

c- Etudier le signe de $g(x)$ sur] 0, + ∞ [.

4) a- Etudier les variations de f.

b- Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. En déduire que $-0.67 \leq f(\alpha) \leq -0.65$

5) a- Etudier le signe de f (x) et montrer que f (x) < 0 si et seulement si $x \in \,]1, e^2[$.

b- Calculer f (1) et $f(e^2)$ et tracer (C).

B- On considère la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)dt$. On appelle (Γ) la courbe représentative de F .

1) a- Sans calculer F (x), étudier les variations de F sur $]0, +\infty[$.

b- Que peut-on dire des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?

2) a- Démontrer que $\int_1^x \ln(t)dt = x\ln x - x + 1$

b- Démontrer que $F(x) = x\ln x - 3x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2\ln x + 3$

c- Calculer $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$.

d- En remarquant que $F(x) = x\ln x\left(1 - \dfrac{3}{\ln x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{2}{x}\right) + 3$, calculer

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$$

e- Dresser un tableau de variation de F et tracer (Γ) .

3) Calculer l'aire S du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations x = 1 et $x = e^2$. Donner une valeur approchée de S à 10^{-3} près par excès.

Concours d'entrée 2001-2002 **Solution de Mathematiques** **Durée: 3 heures**
Juillet 2001

I- Cette inéquation est définie pour : $\begin{cases} \dfrac{x+1}{5-x} > 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$

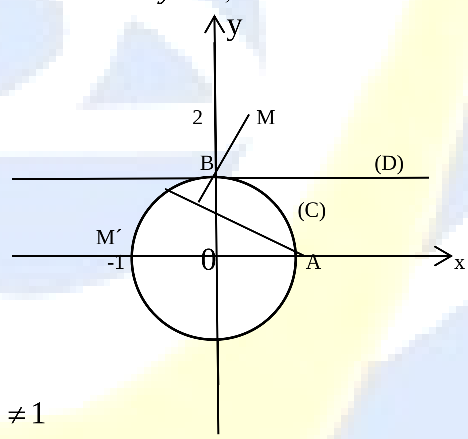
Ce qui donne -1< x <5 et $x > \dfrac{3}{2}$, d'où $\dfrac{3}{2} < x$ <5.

L'inéquation : $\ln\left(\dfrac{x+1}{5-x}\right) > \ln(2x-3)$ donne $\dfrac{x+1}{5-x}$ >2x-3

D'où $\dfrac{2x^2-12x+16}{5-x} > 0$ qui est vérifiée pour x < 2 ou 4< x< 5

La solution acceptable est alors : 4 < x <5 ou $\dfrac{3}{2} < x < 2$

II- 1) z´=1 donne $z-i=\bar{z}+i$, d'où z - $\bar{z}$ = 2i et si z = x + iy on obtient y = 1, donc l'ensemble des points M est la droite (D) privée de B.



2) z´ $\bar{z}$´ = $\dfrac{z-i}{\bar{z}+i} \times \dfrac{\bar{z}+i}{z-i} = 1$

Or $z'\,\bar{z}' = |z'|^2 = 1 = OM'^2$ d'ou $OM' = 1$

Et par suite le point M' est un point du cercle (C)

3) a- M n'appartient pas à (D), donc Im(z) $\neq$ 1.

$$\frac{z'-1}{z-i} = \frac{\dfrac{z-i}{z+i}-1}{z-i} = \frac{z-i-\bar{z}-i}{(z-i)(\overline{z-i})} = \frac{2i(\mathrm{Im}(z)-1)}{|z-i|^2} \text{ et } \mathrm{Im}(z) \neq 1$$

Donc $\dfrac{z'-1}{z-i}$ est un imaginaire pur.

b- On a $\dfrac{z_{\overline{AM'}}}{z_{\overline{BM}}} = \dfrac{z_{M'}-z_A}{z_M-z_B} = \dfrac{z'-1}{z-i}$ qui est un imaginaire pur, donc les deux droites (AM') et (BM) sont perpendiculaires.

c- M n'appartient pas à (D), donc (AM') et (BM) sont perpendiculaires donc M' se trouve sur la perpendiculaire menée de A à (BM) et M' est un point de (C), donc M' est le point d'intersection autre que A de ces deux ensembles.

d- Si M est un point de (D) privée de B alors z = x+ i avec $x \neq$ 0

$z' = \dfrac{x+i-i}{x-i+i} = 1$ alors M' est confondu avec A.

III- 1) On a $z_{n+1} = \dfrac{1}{1+i} z_n + i = \dfrac{1-i}{2} z_n + i$ **,** c'est la forme complexe d'une similitude.

On a $a = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_1 = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{i}{1-\dfrac{1}{1+i}} = 1+i$

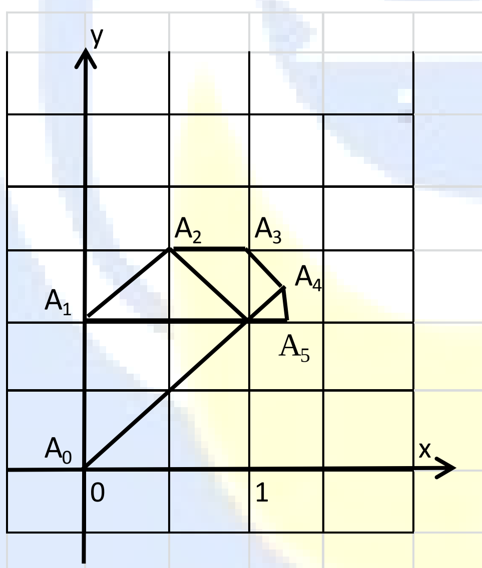
Donc A_{n+1} est l'image de A_n par la similitude directe de centre I (1+i),

de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

2) a- On a $(\overrightarrow{IA_n}; \overrightarrow{IA_{n+1}}) = \dfrac{-\pi}{4} (2\pi)$ et $IA_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} IA_n$, donc le triangle IA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}

b- IA_nA_{n+1} est rectangle isocèle en A_{n+1} et $(\overrightarrow{A_{n+1}I}; \overrightarrow{A_{n+1}A_n}) = \dfrac{-\pi}{2} (2\pi)$ *donc* A_{n+1} est l'intersection du demi-cercle de diamètre $[IA_n]$ et de la médiatrice de $[IA_n]$. On a $z_0 = 0$, $z_1 = i$,

$z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} i$, $z_3 = 1 + \dfrac{3}{2} i$, $z_4 = \dfrac{5}{4} + \dfrac{5}{4} i$, $z_5 = \dfrac{5}{4} + i$



3) a- On a $a_k = aire(IA_kA_{k+1}) = \dfrac{1}{2} IA_k \times IA_{k+1} \times \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4} IA_k{}^2$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} IA_{k-1}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times IA^2{}_{k-1} = \frac{1}{2} a_{k-1}$$

Donc a_k est le terme général d'une suite géométrique de premier terme $a_0 = \frac{1}{4} IA_0{}^2 = \frac{1}{2}$

et de raison $q = \frac{1}{2}$

b- On a $S_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{2} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$

IV-1) a- On a p (d'avoir *B, B, B, B, R*)= $\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{243}$

b- Avoir une boule rouge parmi cinq boules revient à avoir:
(R, B, B, B, B) ou (B, R, B, B, B) ou (B, B, R, B, B) ou (B, B, B, R, B) ou (B, B, B, B, R)
D'où p (d'avoir *1R et 4B*)= $5 \times \frac{2}{243} = \frac{10}{243}$

c- L'évènement : avoir au moins une boule bleue est le contraire de l'évènement les 5 boules sont rouges, d'où : p (au moins une)= $1 - \left(\frac{4}{6}\right)^5 = \frac{211}{243}$

2) a- Considérons les deux évènements :
B : la boule tirée est bleue
U_i : la boule tirée provient de U_i

$$p(B) = p(U_1) \times p(B/U_1) + p(U_2) \times p(B/U_2) + p(U_3) \times p(B/U_3)$$

$$p(B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{5}$$

b- $p(U_3 / B) = \frac{p(U_3 \cap B)}{p(B)} = \frac{18}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{2}$

V- A. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right) \times \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - 2) = 1 \times (+\infty) = +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1}{x}\right)\times \lim_{x\to 0^+}(\ln x - 2) = (-\infty)\times(-\infty) = +\infty$$

2) f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme étant le produit de deux fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{x-x+1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{x-1}{x}\times\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(\ln x + x - 3)$$

3) a- On a $g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ pour tous $x \in]0;+\infty[$, donc g est strictement croissante dans $]0;+\infty[$

b- On a $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

g est continue et strictement croissante et g(x) varie de $-\infty$ à $+\infty$ alors g(x) = 0 admet une solution unique α .

g (2, 20) = ln (2, 20) + 2,20 – 3 $\approx$ - 0,01 < 0

g (2, 21) = ln (2, 21) + 2,21 – 3 $\approx$ 0,002 >0

Donc 2,20 < α < 2,21

c- g(x) < 0 pour 0 < x < α et g(x) > 0 pour $x > \alpha$

g(x) = 0 pour x = α

4) a- $f'(x)$ a même signe que g(x), d'où le tableau de variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

b- On a $f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\alpha}(\ln\alpha - 2)$ et $\ln\alpha + \alpha - 3 = 0$

d'où $f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\alpha}(-\alpha+3-2) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ On a 2,20 < α <2,21 d'où 1,20< α -1<1,21

et 1,44 < (α -1)^2 <1,4641 et puisque $\frac{1}{2,21} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2,20}$ alors $\frac{1,44}{2,21} < \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < \frac{1,4641}{2,20}$

et par suite – 0,67 < $f(\alpha)$ < -0,65

5) a- $f(x) = 0$ donne $\left(\frac{x-1}{x}\right)(\ln x - 2) = 0$ d'où $x = 1$ ou $x = e^2$

donc la courbe (C) coupe l'axe $x'x$ en deux points d'abscisses 1 et e^2, puisque $f(\alpha) < 0$ alors $0 < 1 < \alpha$ et $e^2 > \alpha$

x	0		1		α		e^2		$+\infty$
$f(x)$	||	$+$	0	$-$	$f(\alpha)$	$-$	0	$+$	

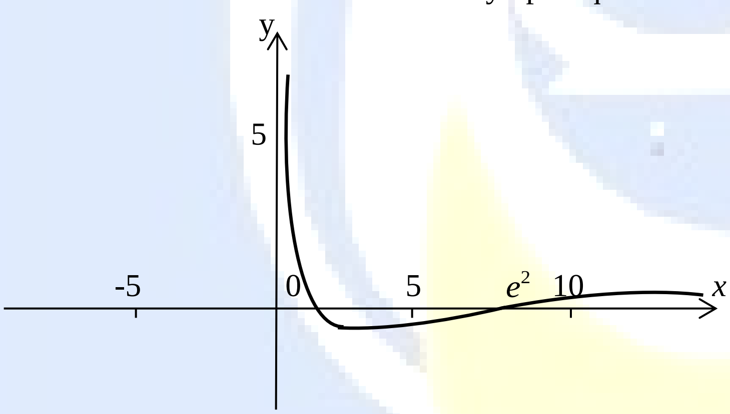
Donc $f(x) > 0$ pour $0 < x < 1$ ou $x > e^2$

$f(x) < 0$ pour $1 < x < e^2$ Donc $f(x) < 0$ si et seulement si $x \in]1; e^2[$

b- On a $f(1) = 0$ et $f(e^2) = 0$. (On aura $\beta = 1$ et $\gamma = e^2$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{x}\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right)\right] = 0$$

Donc $x'x$ est une direction asymptotique.



B- 1) a- On a $F'(x) = f(x)$ avec $F(1) = 0$, d'où le tableau de variations de F :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$F'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	||	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	

b- Les tangentes à (Γ) aux points d'abscisses 1 et e^2 sont parallèles à $x'x$ car $F'(1)\ F(e^2) = 0$

2) a- Posons $u = \ln t$ et $v' = 1$, on a $u' = \frac{1}{t}$ et $v = t$, d'où $\int_1^x \ln t\, dt = t\ln t\big|_1^x - \int_1^x dt = x\ln x - x + 1$

b- On a $F(x) = \int_1^x \left(\frac{t-1}{t}\right)(\ln t - 2)dt = \int_1^x \left(\ln t - 2 - \frac{\ln t}{t} + \frac{2}{t}\right)dt$

$$= \left[t\ln t - t - 2t - \frac{1}{2}\ln^2 t + 2\ln t\right]_1^x$$

$$= x\ln x - x - 2x - \frac{1}{2}\ln^2 x + 2\ln x - (-3)$$

$$= x\ln x - 3x - \frac{\ln^2 x}{2} + 2\ln x + 3$$

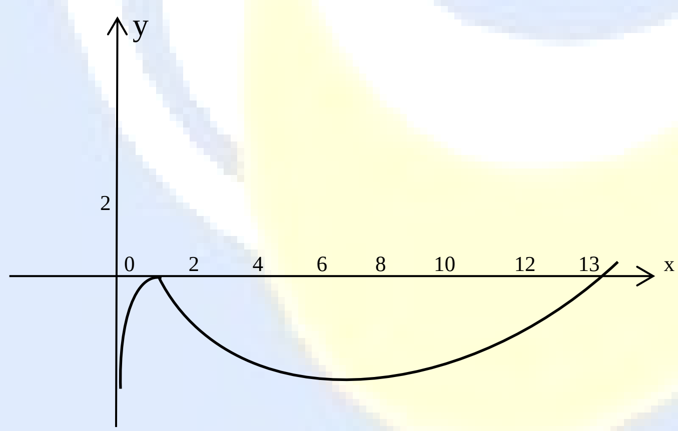
c- On a $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = -\infty$

d- On a $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln x\left(1 - \frac{3}{\ln x} - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x}\right) + 3 = +\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$$

e- $x = 0$ est une asymptote verticale à (Γ). $y'y$ est une direction asymptotique à (Γ) en $+\infty$

$F(1) = 0$, $F(e^2) = 5 - e^2 \approx -2{,}389$



3) Pour $x \in]1; e^2[$, (Γ) est au-dessous de $x'x$, donc

$$S = -\int_1^{e^2} f(x)dx = -F(e^2) + F(1) = e^2 - 5 \approx 2{,}390 \text{ unités d'aire}.$$