UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2017 - 2018 | *Mathématiques* | *Durée : 3 heures*
La distribution des notes est sur 50 | *(Bac Libanais)* | *8 Juillet 2017*

Exercice 1 (7 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.

A- Soit A le point d'affixe 10 et (γ) le cercle de diamètre $[OA]$.

1- Montrer que les points B et C d'affixes respectives $b=1+3i$ et $c=8-4i$ appartiennent à (γ) .

2- Soit D le point d'affixe $d=2+2i$.

Calculer $\dfrac{b-d}{b-c}$ et $\dfrac{d}{b-c}$. En déduire que D est le projeté orthogonal de O sur (BC).

Tracer (γ) et placer les points A, B, C et D.

B- A tout point M du plan d'affixe z, distinct de O, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\dfrac{20}{\overline{z}}$.

1- Montrer que les points O, M et M' sont alignés .

2- On suppose dans cette partie que le point M appartient à la droite (Δ) d'équation $x=2$.

a) Vérifier que $z+\overline{z}=4$ et montrer que $5(z'+\overline{z'})=z'\overline{z'}$. En déduire que M' appartient à (γ) .

b) Considérer un point M sur (Δ) et placer le point M' associé à M .

Exercice 2 (7 points)

30% des élèves d'un lycée sont membres du " club des activités parascolaires " (CAP) .
On sait que le quart des filles et le tiers des garçons du lycée sont membres du CAP.

A- Un élève du lycée est choisi au hasard . On considère les deux évènements :
F : « l'élève choisi est une fille » et A : « l'élève choisi est membre du CAP ».

1- a) Montrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $\dfrac{2}{5}$.

b) Calculer la probabilité que l'élève choisi soit un garçon qui n'est pas membre du CAP .

2- On choisit un élève du CAP . Quelle est la probabilité que cet élève soit une fille ?

B- Pour financer la cérémonie scolaire pour la journée nationale , le CAP organise une loterie .
Chaque jour , un élève du lycée est choisi au hasard et de manière indépendante pour tenir la loterie .

1- Déterminer la probabilité que , parmi les élèves choisis dans une semaine de 5 jours , il y a exactement deux membres du CAP .

2- Pour tout entier naturel non nul n , on note p_n la probabilité que **,** dans n semaines consécutives , il y a au moins un membre du CAP choisi . Montrer que $p_n=1-\left(\dfrac{7}{10}\right)^{5n}$.

3- Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n>0{,}999$.

Exercice 3 (7 points)

1- On considère les fonctions f et h définies sur l'intervalle $K=[1\,;\,2]$ par :

$f(x)=1+2\ell n(x+1)-\ell n(x^2+1)$ et $h(x)=f(x)-x$.

a) Montrer que les deux fonctions f et h sont strictement décroissantes sur K .

b) Montrer que si $x\in K$, alors $f(x)\in K$.

c) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α .

2- On considère la suite (U_n) de premier terme $U_0=\dfrac{1}{5}$ telle que , pour tout entier naturel n , $U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Montrer que , pour tout $n\geq 1$, $1\leq U_n\leq 2$.

b) On admet que , pour tout $x\in K$, $\left|f'(x)\right|\leq\dfrac{1}{4}$.

Sachant que , par tout $x\in K$, on a $\left|f(x)-\alpha\right|\leq\dfrac{1}{4}\left|x-\alpha\right|$, montrer que , pour tout $n\geq 1$,

$\left|U_{n+1}-\alpha\right|\leq\dfrac{1}{4}\left|U_n-\alpha\right|$.

c) Montrer par récurrence que , pour tout entier naturel n , $\left|U_n-\alpha\right|\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

En déduire la limite de la suite (U_n) .

Exercice 4 (9 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

On considère l'ellipse (γ) d'équation $\dfrac{x^2}{4}+(y+1)^2=1$.

1- Tracer (γ) . (***Unité graphique : 2 cm***)

2- Calculer l'aire du domaine intérieur à (γ). En déduire $\displaystyle\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

3- Soit F_1 et F_2 les deux foyers de (γ) (F_1 est celui d'abscisse positive) , (d_1) la directrice associée à F_1 , et $M(\alpha\,;\,\beta)$ avec $\beta\neq -1$, un point de (γ) .

a) La tangente (δ) à l'ellipse (γ) en M coupe (d_1) en L . Montrer que l'angle $L\hat{F_1}M$ est droit .

b) Placer le point M sur (γ) et décrire une construction géométrique de la tangente (δ) .

4- Soit θ la mesure en radians de l'angle $F_1 \hat{M} F_2$.

a) Calculer MF_1 en fonction de α et déduire MF_2 .

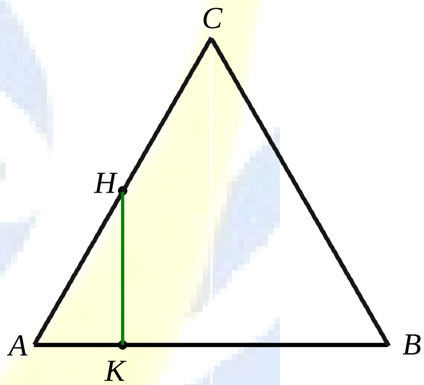
b) Montrer que $\cos\theta = \dfrac{3\alpha^2 - 8}{16 - 3\alpha^2}$ et déterminer θ lorsque M est l'un des sommets de (γ) qui sont sur l'axe non focal .

c) Déterminer l'abscisse des points de (γ) qui sont aussi sur le cercle de diamètre $[F_1F_2]$.

Exercice 5 **(9 points)**

Dans un plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

Soit H le milieu de $[AC]$ et K le projeté orthogonal de H sur $[AB]$.



1- Soit S la similitude de centre A qui transforme K en H
et S' la similitude qui transforme B en H et H en K .
Déterminer le rapport et un angle de chacune des similitudes S et S'.

2- On considère la transformation $T = S \circ S'$.

a) Déterminer $T(H)$ et préciser la nature et les éléments de T .

b) Déterminer $T(C)$. En déduire que $S'(C) = A$.

3- Soit I le milieu de $[AB]$.

a) Justifier que K est le milieu de $[AI]$. En déduire que $S'(A) = I$.

b) Déterminer le point $J = S'(I)$.

4- On considère la transformation $f = S' \circ S' \circ S'$.

a) Déterminer la nature et les éléments de f .

b) Montrer que $f(C) = J$. En déduire le centre L de S'.

5- Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ où $\vec{u} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

a) Déterminer la relation complexe de S'.

b) En déduire l'affixe de J et celle du centre L de S'.

Exercice 6 (11 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

A- Soit T la transformation qui , à tout point $M(x\,;\,y)$, associe le point $N(x'\,;\,y')$ tel que $x'=-x$ et $y'=-2x+y$.

1- a) Montrer que $\overrightarrow{MN}$ est colinéaire à $\vec{i}+\vec{j}$ et que le milieu P de $[MN]$ appartient à l'axe des ordonnées .

b) Décrire une construction géométrique de l'image N d'un point quelconque M du plan .

2- a) Vérifier que tout point de l'axe des ordonnées est invariant par T .

b) Soit (d) une droite de coefficient directeur a . Montrer que l'image de (d) par T est une droite (d') et que les droites (d) et (d') se coupent sur l'axe des ordonnées .

B- 1- a) Dresser le tableau de variations de la fonction g définie sur $]-\infty\,;0]$ par $g(x)=x-1+2e^{x}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction h définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x)=x-1+2e^{-x}$.

2- Soit (C_1) et (C_2) les courbes représentatives de g et h respectivement (On ne demande pas de les tracer) .

a) Montrer que (C_2) est l'image de (C_1) par T .

b) Montrer que la droite (δ) d'équation $y=x-1$ est asymptote à (C_1) et à (C_2) .

c) Déterminer la position de chacune des courbes (C_1) et (C_2) par rapport à (δ).

3- On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=x-1+2e^{-|x|}$. Soit (C) sa courbe représentative .

a) Montrer que (C) est la réunion de (C_1) et (C_2).

b) Préciser les demi-tangentes à (C) au point A d'abscisse 0 .

c) Tracer (C) (***Unit***é ***graphique*** : **2 *cm***) .

4- Soit (Δ) la droite d'équation $y=x-1+2m$ où $m\in]0\,;1[$.

a) Montrer que , pour tout $m\in]0\,;1[$, (Δ) coupe (C) en deux points : E sur (C_1) et F sur (C_2) .

b) Vérifier que $F=T(E)$ (T est la transformation définie dans la partie ***A***) .

5- Soit (t_1) la tangente en E à (C_1) et (t_2) la tangente en F à (C_2) .

Sachant que (t_1) et (t_2) se coupent sur l'axe des ordonnées , déduire que (t_2) est l'image de (t_1) par T .

UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Entrance Exam 2017 - 2018 **Mathematics (SOLUTION)** ***July 08 , 2017***

(*Program : Lebanese bac*)

Exercise 1 **(7 points)**

A- (γ) is the circle of diameter $[OA]$ of center the point I with affix 5, the mid point of $[OA]$, and radius 5 .

1- $IB = |b-5| = |-4+3i| = 5$ then , B belongs to (γ) .

$IC = |c-5| = |3-4i| = 5$ then C belongs to (γ) .

2- D is the point of affix $d = 2+2i$;

$\dfrac{b-d}{b-c} = \dfrac{-1+i}{-7+7i} = \dfrac{1}{7}$ and

$\dfrac{d}{b-c} = \dfrac{2+2i}{-7+7i} = \dfrac{2i(1-i)}{-7(1-i)} = -\dfrac{2}{7}i$.

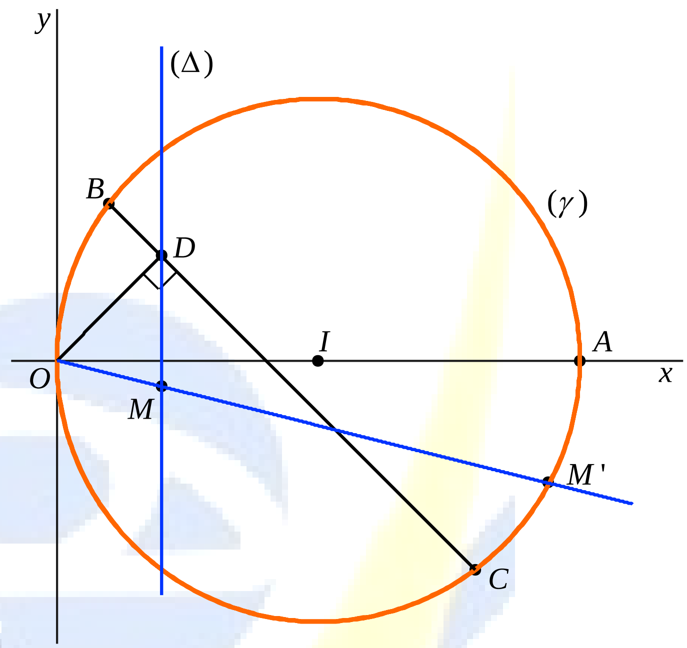
$\dfrac{b-d}{b-c}$ is real then , $D \in (BC)$;

$\dfrac{d}{b-c}$ is pure imaginary then , (OD) is perpendicular to (BC) .

Therefore (OD) is perpendicular to (BC) at D ;

that is D is the orthogonal projection of O on (BC) .

Drawing a figure showing (γ) , A, B and C .



B- 1- $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{20}{z\bar{z}}$ then , $\dfrac{z'}{z}$ is a pure positive real number ; therefore $(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{OM'}) = 0 \ (2\pi)$ and the points O, M and M' are collinear .

2- (Δ) is the straight line of equation $x = 2$ and M a point of (Δ) then , $z = 2 + yi$ with $y \in IR$.

a) $z + \bar{z} = 2 + yi + 2 - yi = 4$.

$z' + \overline{z'} = \dfrac{20}{\bar{z}} + \dfrac{20}{z} = \dfrac{20(z+\bar{z})}{z\bar{z}} = \dfrac{80}{z\bar{z}}$; $5(z'+\overline{z'}) = \dfrac{400}{z\bar{z}} = \dfrac{20}{\bar{z}} \times \dfrac{20}{z} = z'\overline{z'}$.

$IM'^2 = (z'-5)(\overline{z'-5}) = z'\overline{z'} - 5(z'+\overline{z'}) + 25 = 25$ then , $IM' = 5$ and $M' \in (\gamma)$.

Therefore , M' is the point of intersection of (OM) and (γ) .

b) Plotting M' on the figure as the point where (OM) cuts (γ) .

Exercise 2 (7 points)

A- It is given that $p(A)=\frac{3}{10}$, $p(A/G)=\frac{1}{4}$ and $p(A/\overline{G})=\frac{1}{3}$.

1- a) Let $x=p(G)$. By the law of total probability ,

$P(A)=p(A\cap G)+p(A\cap\overline{G})=p(G)\times p(A/G)+p(\overline{G})\times p(A/\overline{G})$, then $\frac{3}{10}=x\times\frac{1}{4}+(1-x)\times\frac{1}{3}$.

Therefore , $\frac{1}{12}x=\frac{1}{30}$, then $x=\frac{2}{5}$; that is $p(G)=\frac{2}{5}$.

b) The required probability is $p(\overline{G}\cap\overline{A})=p(\overline{G})\times P(\overline{A}/\overline{G})=p(\overline{G})\times(1-P(A/\overline{G}))=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$.

2- The required probability is $p(G/A)=\frac{p(G\cap A)}{p(A)}=\frac{p(G)\times p(A/G)}{p(A)}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\div\frac{3}{10}=\frac{1}{3}$.

B- 1- The 2 days of choosing a member of the EAC can be selected in ${}_5C_2=10$ ways ;

in addition $p(A)=\frac{3}{10}$ and $p(\overline{A})=\frac{7}{10}$; therefore , the required probability is

$$p=10\times\left(\frac{3}{10}\right)^2\times\left(\frac{7}{10}\right)^3=\frac{30870}{100000}=0.3087.$$

2- In n weeks there are $5n$ days . Consider the event :

E : " no student is a member of the EAC " ; $p(E)=\left(\frac{7}{10}\right)^{5n}$.

The required probability is $p_n=p(\overline{E})=1-\left(\frac{7}{10}\right)^{5n}$

3- We have to solve the inequality $1-\left(\frac{7}{10}\right)^{5n}>0.999$ which is equivalent to $\ell n\left((0.7)^{5n}\right)<\ell n(0.001)$;

that is $5n\,\ell n(0.7)<\ell n(0.001)$; $n>\frac{\ell n(0.001)}{5\,\ell n(0.7)}\approx 3.87$.

Therefore we need at least 4 weeks for having $p_n>0.999$.

Exercise 3 **(7 points)**

1- a) $f'(x) = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{2(1-x)}{(x+1)(x^2+1)}$.

For all x in $]1\,;2[$, $f'(x)<0$ then f is strictly decreasing in K .

$h'(x) = f'(x)-1$ where $f'(x)\le 0$ then , for all x in K, $h'(x)<0$ and h is strictly decreasing in K .

b) f is continuous and strictly decreasing in K then , for all x in K, $f(2)<f(x)<f(1)$ where $f(1)=1+\ell n2<2$ and $f(2)=1+\ell n9-\ell n5>1$ then , $f(x)\in K$.

c) h is continuous and strictly decreasing in K then , $h(K)=[h(2)\,;h(1)]$ where $h(1)=\ell n2\approx 0.693$ and $h(2)=-1+\ell n9-\ell n5\approx -0.412$.

h is a bijection of K into the interval $h(K)$ that contains 0 then , the equation $h(x)=0$ which is equivalent to $f(x)=x$ has a unique solution α in K .

2- a) $U_1 = f(U_0) = 1+\ell n\dfrac{18}{13} \approx 1.325$ then , $U_1\in K$.

If , for a certain all $n\ge 1$, $U_n\in K$ then , $f(U_n)\in K$ (proved in 1-b) ; that is $U_{n+1}\in K$.

Therefore , for all $n\ge 1$, $U_n\in K$.

b) $\left|U_{n+1}-\alpha\right| = \left|f(U_n)-\alpha\right|$ where $U_n\in K$ then , $\left|U_{n+1}-\alpha\right| \le \dfrac{1}{4}\left|U_n-\alpha\right|$.

c) Proof by induction :

$1<\alpha<2$ and $1<U_1<2$ then , $-1<U_1-\alpha<1$ and $\left|U_1-\alpha\right|<1=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{1-1}$.

If , for a certain all $n\ge 1$, $\left|U_n-\alpha\right|\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$,

$$\left|U_{n+1}-\alpha\right| = \left|f(U_n)-\alpha\right| \le \frac{1}{4}\left|U_n-\alpha\right| \le \frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

Therefore , for all $n\ge 1$, $\left|U_n-\alpha\right|\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=0$ then , $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|U_n-\alpha\right|=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha$. Consequently , (U_n) converges to α .

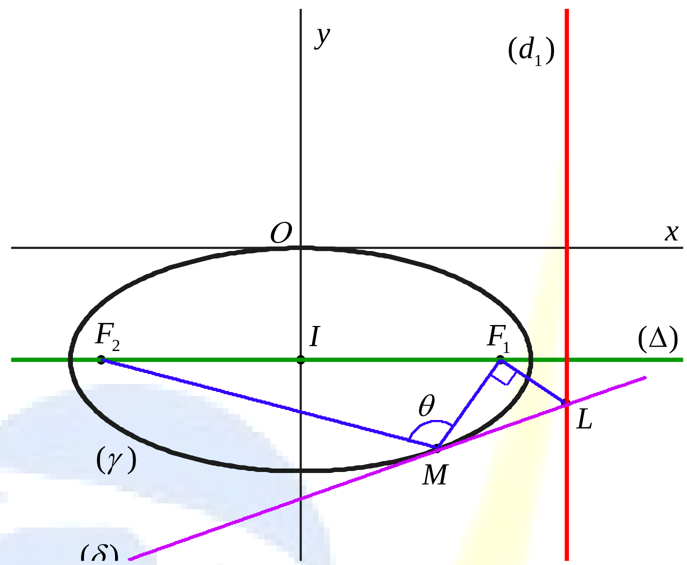
UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

<u>*Exercise 4*</u> (9 points)

Consider the ellipse (γ) of equation $\frac{x^2}{4}+(y+1)^2=1$.

1- For the ellipse (γ) , the center is $I(0\,;-1)$ and the focal axis is the straight line (Δ) of equation $y=-1$.
$a=2$, $b=1$ then , the vertices of (γ) are : $(2\,;-1)$, $(-2\,;-1)$, $(0\,;0)$, $(0\,;-2)$.
Drawing (γ) .



2- The area of the domain interior to (γ) is $S=\pi ab=2\pi$ *units of area* .

The equation $\frac{x^2}{4}+(y+1)^2=1$ can be written as $y=-1\pm\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$ where $x\in[-2\,;2]$ then ,

$$\frac{S}{4}=\int_0^2\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)dx \text{ units of area .}$$

Therefore $\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{S}{2}=\pi$.

3- a) An equation of (δ) is $\frac{\alpha x}{4}+(\beta+1)(y+1)=1$.

(δ) cuts the directrix (d_1) of equation $x=\frac{4}{\sqrt{3}}$ at $L(\frac{4}{\sqrt{3}}\,;\frac{\sqrt{3}-\alpha}{\sqrt{3}(\beta+1)}-1)$.

$\overrightarrow{F_1M}(\alpha-\sqrt{3}\,;\beta+1)$ and $\overrightarrow{F_1L}(\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{\sqrt{3}-\alpha}{\sqrt{3}(\beta+1)})$ then $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1L}=0$ and the angle $L\hat{F}M$ is right .

b) M being given on (γ), the perpendicular to (F_1M) at F_1 cuts (d_1) at a point L such that (ML) is the tangent to (γ) at M .

4- a) $d(M\,;(d_1))=\left|\alpha-\frac{4}{\sqrt{3}}\right|=\frac{4}{\sqrt{3}}-\alpha$ then , $MF_1=e\,d(M\,;(d_1))=\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{4}{\sqrt{3}}-\alpha)=2-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha$ and

$MF_2=2a-MF_1=2+\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha$.

b) $\overrightarrow{MF_1}(\sqrt{3}-\alpha\ ;\ -1-\beta)$ and $\overrightarrow{MF_2}(-\sqrt{3}-\alpha\ ;\ -1-\beta)$ then ,

$$\cos\theta=\cos(\overrightarrow{MF_1}\ ;\ \overrightarrow{MF_2})=\frac{\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}}{MF_1\times MF_2}=\frac{\alpha^2-3+(\beta+1)^2}{\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)}=\frac{\alpha^2-3+1-\frac{\alpha^2}{4}}{4-3\frac{\alpha^2}{4}}=\frac{3\alpha^2-8}{16-3\alpha^2}.$$

If M is one of the vertices on the non focal axis of (γ) then , $\alpha=0$ and $\cos\theta=-\frac{1}{2}$; therefore $\theta=\frac{2\pi}{3}$ *radians* .

c) The points of (γ) of ordinate -1 do not belong to the circle of diameter $[F_1F_2]$.
The points of (γ) that belong to the circle of diameter $[F_1F_2]$ are the points $M(\alpha\ ;\ \beta)$ where $\beta\neq-1$ such that $F_1\hat{M}F_2$ is right ; they are the points $M(\alpha\ ;\ \beta)$ such that $\cos\theta=\frac{3\alpha^2-8}{16-3\alpha^2}=0$; $3\alpha^2-8=0$; $\alpha=-2\sqrt{\frac{2}{3}}$ or $\alpha=2\sqrt{\frac{2}{3}}$.
Therefore , the points of (γ) that are on the circle of diameter $[F_1F_2]$ are the 2 points of abscissas $-2\sqrt{\frac{2}{3}}$ and the 2 points of abscissas $2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

<u>Exercise 5</u> (9 points)

1- The similitude S of center A transforms K into H .
The triangle AKH is semi equilateral then , the ratio of S is $\frac{AH}{AK}=2$ and an angle of S is $\frac{\pi}{3}$.
The similitude S' transforms B into H and H into K where $\frac{HK}{BH}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ and $(\overrightarrow{BH}\ ;\ \overrightarrow{HK})=(\overrightarrow{BH}\ ;\ \overrightarrow{HA})+(\overrightarrow{HA}\ ;\ \overrightarrow{HK})=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ then , the ratio of S' is $\frac{1}{2}$ and an angle of S' is $\frac{2\pi}{3}$.

2- a) $T(H)=S\circ S'(H)=S\left(S'(H)\right)=S(K)=H$.
$T=S\circ S'$ where S and S' are two similitudes of ratios 2 and $\frac{1}{2}$ of product 1 and angles $\frac{\pi}{3}$ and

$\frac{2\pi}{3}$ of sum π then T is a similitude of ratio 1 , angle π that keeps H invariant .

Therefore , T is the central symmetry of center H .

b) $T(C) = A$ then $S(S'(C)) = A$; that is $S(S'(C)) = S(A)$ and $S'(C) = A$.

3- a) $AK = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{4}AC$ then , $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$ then , K is the mid point of $[AI]$.

$S'(C) = A$, $S'(H) = K$ and A is the symmetric of C with respect to H then , $S'(A)$ is the symmetric of $S'(C) = A$ with respect to $S'(H) = K$; therefore $S'(A) = I$.

b) $S'(A) = I$, $S'(B) = H$ and I is the mid point of $[AB]$ then , $S'(I) = J$, the mid point of $[IH]$.

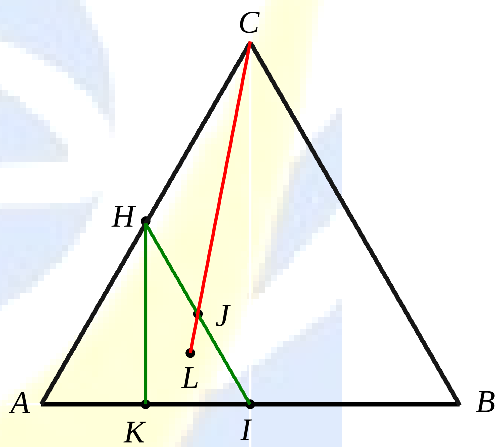
4- a) S' is a similitude of ratio $\frac{1}{2}$ and angle $\frac{2\pi}{3}$ and $f = S' \circ S' \circ S'$ then , f is a similitude of ratio $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ and angle $\frac{2\pi}{3} \times 3 = 2\pi$; therefore f is a dilation of ratio $\frac{1}{8}$ having same center as S'.

b) $f(C) = S' \circ S' \circ S'(C) = S' \circ S'(A) = S'(I) = J$.

f is a dilation of ratio $\frac{1}{8}$ such that $f(C) = J$ then ,

its center is the point L such that $\overrightarrow{LJ} = \frac{1}{8}\overrightarrow{LC}$.

S' and f have the same center then , L is the center of S'.



5- The plane is referred to the direct orthonormal system $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ where $\vec{u} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

a) The complex relation of the similitude S' of ratio $\frac{1}{2}$ and angle $\frac{2\pi}{3}$ is of the form $z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z + b$.

$A(0 ; 0)$, $I(2 ; 0)$ and $S'(A) = I$ then $2 = b$; therefore $z' = \frac{-1+\sqrt{3}i}{4}z + 2$.

b) $J = S'(I)$ then , the affix of J is $z_J = \frac{-1+\sqrt{3}i}{4} \times 2 + 2 = \frac{3+\sqrt{3}i}{2}$.

The affix of the center L of S' is such that $z_L = \frac{-1+\sqrt{3}i}{4}z_L + 2$ then ,

$z_L = \frac{8}{5-\sqrt{3}i} = \frac{10+2\sqrt{3}i}{7}$.

Exercise 6 **(11 points)**

A- 1- a) $\overrightarrow{MN} = (x'-x)\vec{i} + (y'-y)\vec{j} = -2x\,\vec{i} - 2x\,\vec{j} = -2x(\vec{i} + \vec{j})$ then , $\overrightarrow{MN}$ is collinear to $\vec{i} + \vec{j}$.

The abscissa of the mid point P of $[MN]$ is $\dfrac{x'+x}{2} = 0$ then , P belongs to the axis of ordinates .

b) Let (d) be the straight line of equation $y = x$ having $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ as a direction vector . M being any point of plane , the parallel to (d) drawn through M cuts the axis of ordinates at point P ; the symmetric of M with respect to P is the image N of M by T .

2- a) Let $M(0\,;\,y)$ be any point of the axis of ordinates ; the coordinates of the image of M by T are $x' = 0$ and $y' = y$ then , $M' = M$ and M is invariant by T .

b) Let (d) be a straight line of director coefficient a ; an equation of (d) is of the form $y = ax + b$ where $b \in IR$. An equation of the image of (d) by T is $-2x + y = a\,x + b$; $y = (a+2)\,x + b$; therefore , the image of (d) by T is a straight line (d') of equation $y = (a+2)\,x + b$.

The straight lines (d) and (d') intersect at the point $(0\,;\,b)$ which is on the axis of ordinates .

B- 1- a) g is defined on $]-\infty\,;\,0]$ by $g(x) = x - 1 + 2e^{x}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ then , $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

$g'(x) = 1 + 2e^{x}$.

Table of variations of g .

x	$-\infty$		0
$g'(x)$		$+$	2
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1

b) h is defined on $[0\,;+\infty[$ by $h(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ then , $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

$h'(x) = 1 - 2e^{-x}$.

Table of variations of h .

x	0		$\ell n2$		$+\infty$
$h'(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$h(x)$	1	$\searrow$	$\ell n2$	$\nearrow$	$+\infty$

2- a) The relations $x' = -x$ and $y' = -2x + y$ are equivalent to $x = -x'$ and $y = y' - 2x'$.

$M(x\,;\,y)$ belongs to (C_1) if and only if $y = x - 1 + 2e^{x}$; that is $y' - 2x' = -x' - 1 + 2e^{-x'}$; $y' = x' - 1 + 2e^{-x'}$; therefore an equation of the image of (C_1) by T is $y = x - 1 + 2e^{-x}$.

Therefore , (C_2) is the image of (C_1) by T .

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(g(x) - (x-1)\big) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ then , the straight line (δ) is asymptote to (C_1) at $-\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\big(h(x) - (x-1)\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ then , the straight line (δ) is asymptote to (C_2) at $+\infty$.

c) For all $x \in]-\infty\,;0]$, $g(x)-(x-1)=2e^{x}>0$ and , for all $x \in [0\,;+\infty[$,

$h(x)-(x-1)=2e^{-x}>0$

then , each of (C_1) and (C_2) lies above (δ).

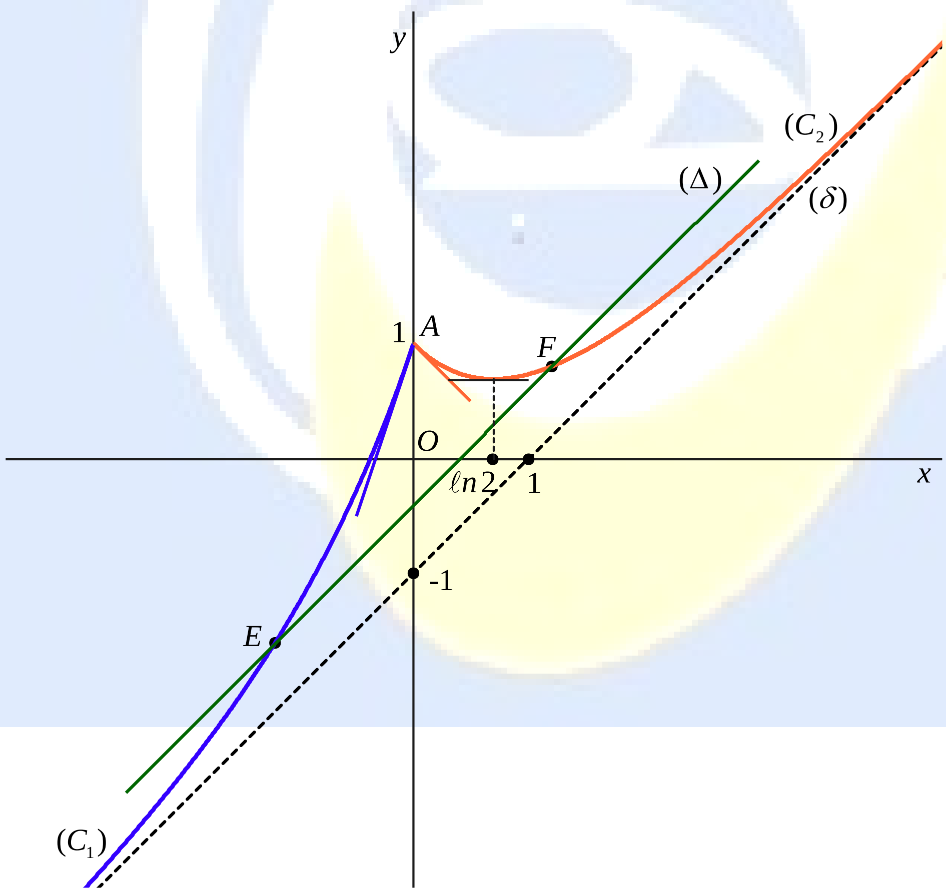
3- The function f is defined on IR by $f(x)=x-1+2e^{-|x|}$.

a) $f(x)=\begin{cases} x-1+2e^{x}=g(x) & if\ \ x\in]-\infty\,;0] \\ x-1+2e^{-x}=h(x) & if\ \ x\in [0\,;+\infty[\end{cases}$; therefore (C) is the union of (C_1) and (C_2).

b) The semi tangent to (C) at the point A of abscissa 0 from the left has the slope $g_{\ell}'(0)=2$ while

the semi tangent to (C) at the point A of abscissa 0 from the right has the slope $h_r'(0)=-1$.

c) Drawing $(C)=(C_1)\cup(C_2)$ (***Graph unit 2 cm***) .



4- (Δ) is the straight line of equation $y = x - 1 + 2m$ where $m \in]0\,;1[$.

a) The equation $f(x) = x - 1 + 2m$ is equivalent to $e^{-|x|} = m$; that is $-|x| = \ell n(m)$;

$|x| = -\ell n(m)$;

$x = \ell n(m)$ or $x = -\ell n(m)$.

Therefore , (Δ) cuts (C) at two points E and F of abscissas $\ell n(m)$ and $-\ell n(m)$.

For all $m \in]0\,;1[$, $\ell n(m) < 0$ then , $E \in (C_1)$ and $-\ell n(m) > 0$ then , $F \in (C_2)$.

b) The coordinates of E are $x = \ell n(m)$ and $y = g(\ell n(m)) = \ell n(m) - 1 + 2m$.

The coordinates of F are $x = -\ell n(m)$ and $y = h(-\ell n(m)) = -\ell n(m) - 1 + 2m$.

The coordinates of the image of E by T are $x' = -x = -\ell n(m)$ and

$y' = -2x + y = -2\ell n(m) + \ell n(m) - 1 + 2m = -\ell n(m) - 1 + 2m$.

Therefore $T(E) = F$.

5- It is given that the tangent (t_1) at E to (C_1) and the tangent (t_2) at F to (C_2) intersect at a point L belonging to the axis of ordinates .

(t_1) is the straight line (LE) where $T(E) = F$ and $T(L) = L$ since L is on the axis of ordinates then , the image (t_1) , which is a straight line , is the straight line (LF) which is the straight line (t_2) .

Concours d'entrée 2017 - 2018 — *Mathématiques* — *Durée : 3 heures*

La distribution des notes est sur 50 — *(Programme : Bac Français)* — *8 Juillet 2017*

Exercice 1 (11 points)

Partie A

1- z est un nombre complexe et $z' = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.

a) Vérifier que si $z \neq 1$, alors $z' = \dfrac{1 - z^5}{1 - z}$.

b) Que vaut z' si $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$?

En déduire la valeur de $S = 1 + \cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5} + \cos\dfrac{6\pi}{5} + \cos\dfrac{8\pi}{5}$.

2- Montrer que $\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{8\pi}{5} = 4\cos^2\dfrac{\pi}{5} - 2$ et que $\cos\dfrac{4\pi}{5} + \cos\dfrac{6\pi}{5} = -2\cos\dfrac{\pi}{5}$.

3- En déduire que $\cos\dfrac{\pi}{5}$ est solution d'une équation du second degré à déterminer.

4- Résoudre cette équation et montrer que $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. En déduire que $\sin\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$.

Partie B

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier naturel n par :

$z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} + i\sqrt{2 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}}\right) z_n$.

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

1- a) Vérifier que $1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} + i\sqrt{2 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} e^{i\frac{\pi}{5}}$.

b) En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2- a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{5}}$.

b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

Exercice 2 (14 points)

Les deux parties **A** et **B** sont indépendantes .

Soit $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ un repère orthonormé de l'espace .

Soient $A(-3;4;5)$ et $B(-4;-1;-1)$ deux points et $\vec{u}\,(-2\,;1\,;1)$ et $\vec{v}\,(-1\,;1\,;0)$ deux vecteurs .

Partie A : *Perpendiculaire commune à deux droites*

On considère la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ ainsi que la droite (Δ) passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$.

On cherche le point K de (d) et le point L de (Δ) tels que (KL) soit perpendiculaire à (d) et à (Δ).

1- Donner une représentation paramétrique de (d) et une représentation paramétrique de (Δ).

2- Déterminer les coordonnées de K et celles de L .

3- Calculer KL

4- Soit (R) le plan d'équation cartésienne $x+y+z-6=0$.

a) Montrer que la droite (d) est incluse dans (R) et que (Δ) est parallèle à (R).

b) Montrer que la droite (LK) est perpendiculaire en K au plan (R) .

c) En déduire la distance du point L au plan (R).

5- Soit E un point quelconque de (Δ) autre que L .

a) Quelle est la distance de E au plan (R) ?

b) Démontrer que , pour tout point F de (d) , $EF > LK$.

Partie B : *Plan médiateur d'un segment*

Le plan médiateur d'un segment $[IJ]$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $MI = MJ$.

1- Trouver une équation cartésienne du plan médiateur (P) du segment $[AB]$.

2- a) Montrer que le milieu de $[AB]$ appartient à (P).

b) Vérifier que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à (P).

3- Soit (d_1) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3\lambda - 2 \\ y = \lambda + 4 \\ z = -\lambda \end{cases}$, $\lambda \in R$.

Déterminer les coordonnées du point C de (d_1) qui est équidistant de A et B .

4- Soit (Q) un plan non orthogonal à la droite (AB) . Montrer que l'ensemble des points de (Q) qui sont équidistants de A et B est une droite à déterminer.

Exercice 3 **(16 points)**

La partie **C** est indépendante des parties **A** et **B** .

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}\times e^{-x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i}\ ,\ \vec{j})$, unité graphique 10 cm .

1- Etudier la dérivabilité de f en 0 . Que peut-on en conclure pour la courbe (C) ?

2- Montrer que , pour $x>0$, on a $f'(x)=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}e^{-x}$. Etudier le sens de variation de f .

3- Etudier la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en conclure pour la courbe (C) ?

4- Tracer soigneusement la courbe (C) .

Partie B

Le but de cette partie est la résolution de l'équation $f(x)=x$ sur $]0\ ;+\infty[$.

1- On pose $g(x)=2x+\ell n\,x$.

a) Montrer que , sur $]0\ ;+\infty[$, les équations $f(x)=x$ et $g(x)=0$ sont équivalentes.

b) Etudier les variations de g et montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution sur $]0\ ;+\infty[$ que l'on notera α . Montrer que α appartient à l'intervalle $[0{,}4\ ;\ 0{,}5]$.

2- En utilisant la courbe (C) , donner une interprétation de α et en donner une valeur approchée .

3- Montrer que si $x\in[0{,}4\ ;\ 0{,}5]$ alors, $f(x)\in[0{,}4\ ;\ 0{,}5]$.

4- On définit la suite u par $u_0=0{,}4$ et , pour tout n de N , $u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Monter que , pour tout n de N , $u_n\in[0{,}4\ ;\ 0{,}5]$.

b) On admet que , pour tout n de N , $\left|u_{n+1}-\alpha\right|\le\dfrac{1}{8}\left|u_n-\alpha\right|$.

Montrer par récurrence que , pour tout n de N , $\left|u_n-\alpha\right|\le 0{,}1\times\dfrac{1}{8^n}$.

c) En déduire que la suite u est convergente et préciser sa limite .

5- En utilisant la relation établie au 4- b) , déterminer le plus petit entier n_0 à partir duquel u_n est une valeur approchée de α à 10^{-6} près .

Partie C

Soit F la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x)=\int_0^x \sqrt{t}\times e^{-t}\,dt$. ***On ne cherchera pas à calculer*** $F(x)$.

1- Préciser le sens de variations de F .

2- Montrer que , pour tout $t\geq 0$, $\sqrt{t}\leq t+\frac{1}{4}$. En déduire que $F(x)\leq \int_0^x \left(t+\frac{1}{4}\right)e^{-t}\,dt$.

3- Soit h la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(t)=\left(t+\frac{1}{4}\right)e^{-t}$ et H la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$

par $H(t)=(at+b)e^{-t}$.
Déterminer a et b pour que H soit une primitive de h sur $[0\,;+\infty[$.

4- Déduire des questions précédentes que , pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $0\leq F(x)\leq \frac{5}{4}$.

Exercice 4 **(9 points)**

Dans un établissement scolaire les oscilloscopes utilisés au laboratoire de physique-chimie ont une durée de vie , en années , modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ . On sait que la probabilité qu'un oscilloscope fonctionne plus de 8 ans est égale à $0{,}383$.

1- Déterminer le paramètre λ. On arrondira à 10^{-4} .
Dans la suite on prendra $\lambda=0{,}12$.

2- Interpréter et déterminer la probabilité $P(X\geq 3)$.

3- Interpréter et déterminer la probabilité $P_{X>2}(X>10)$.

4- Donner une estimation de la durée de vie moyenne d'un oscilloscope.

5- Désirant changer son parc de matériel, l'établissement achète 40% d'oscilloscopes auprès du fournisseur « Oscillo » et le reste auprès du magasin « Electro ».

Les deux fabricants ayant des productions différentes, les durées de vie moyenne des oscilloscopes qu'ils fournissent sont de 8 ans pour « Oscillo » et de 5 ans pour « Electro ».

On admet toujours que les durées de vie des oscilloscopes sont modélisées par des variables aléatoires suivant des lois exponentielles.

Un professeur de physique-chimie prend au hasard un oscilloscope. On note :

E l'événement : « l'appareil provient du fournisseur « Electro » »,

O l'événement : « l'appareil provient du fournisseur « Oscillo » »,

D l'événement : l'appareil fonctionne plus de dix ans ».

a) Quelle est la probabilité que l'oscilloscope choisi fonctionne plus de dix ans sachant qu'il provient du fournisseur « Oscillo » ?

b) Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

c) Quelle est la probabilité que la durée de vie de l'oscilloscope choisi soit supérieure ou égale à 10 ans ?

d) Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'entreprise « Electro » sachant que sa durée de vie est supérieure ou égale à 10 ans ?

Concours d'entrée 2017-2018 ***SOLUTION Mathématiques*** ***8 Juillet 2017***
(Programme : Bac Français)

Exercise 1 **(11 point)**

Partie A

1- z est un nombre complexe et $z'=1+z+z^2+z^3+z^4$.

a) $(1-z)\times(1+z+z^2+z^3+z^4)=1-z^5$ alors si $z\neq 1$, $z'=\dfrac{1-z^5}{1-z}$.

b) Si $z=e^{i\frac{2\pi}{5}}$ alors $z^5=e^{i2\pi}=1$, donc $z'=0$.

Par suite $S=1+\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}+\cos\dfrac{6\pi}{5}+\cos\dfrac{8\pi}{5}=\operatorname{Re}(z')=0$.

2- $\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{8\pi}{5}=\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\left(2\pi-\dfrac{2\pi}{5}\right)=2\cos\dfrac{2\pi}{5}=2\left(2\cos^2\dfrac{\pi}{5}-1\right)=4\cos^2\dfrac{\pi}{5}-2$.

$\cos\dfrac{4\pi}{5}+\cos\dfrac{6\pi}{5}=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{5}\right)=-2\cos\dfrac{\pi}{5}$.

3- $S=1+\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}+\cos\dfrac{6\pi}{5}+\cos\dfrac{8\pi}{5}=0$ donc $1+4\cos^2\dfrac{\pi}{5}-2-2\cos\dfrac{\pi}{5}=0$ ce qui équivaut à

$4\cos^2\dfrac{\pi}{5}-2\cos\dfrac{\pi}{5}-1=0$. Alors $\cos\dfrac{\pi}{5}$ est solution de l'équation $4x^2-2x-1=0$.

4- Les deux racines de l'équation sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$. Or $\cos\dfrac{\pi}{5}>0$, alors $\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

$\sin\dfrac{\pi}{5}>0$ alors , $\sin\dfrac{\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\pi}{5}}=\sqrt{1-\dfrac{6+2\sqrt{5}}{16}}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Partie B

1- a) $1+\frac{1}{\sqrt{5}}+i\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{4}+i\sqrt{\frac{10}{16}-\frac{2\sqrt{5}}{16}}\right)=\frac{4}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)$

$$=\frac{4}{\sqrt{5}}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)=\frac{4}{\sqrt{5}}e^{i\frac{\pi}{5}}.$$

b) $z_{n+1}=\frac{4}{\sqrt{5}}e^{i\frac{\pi}{5}}z_n$ alors $z_1=\frac{4}{\sqrt{5}}e^{i\frac{\pi}{5}}z_0=\frac{4}{\sqrt{5}}e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $z_2=\frac{4}{\sqrt{5}}e^{i\frac{\pi}{5}}z_1=\frac{16}{5}e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

2- a) Par récurrence :

$z_0=1=\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^0 e^{i\frac{0\pi}{5}}$.

Si , pour un certain n , $z_n=\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{5}}$ alors , $z_{n+1}=\frac{4}{\sqrt{5}}e^{i\frac{\pi}{5}}z_n=\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^{n+1} e^{i\frac{(n+1)\pi}{5}}$.

Donc , pour tout entier naturel n , $z_n=\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{5}}$.

b) Les points O, A_0 appartiennent à l'axe $(O\,;\,\vec{u})$ donc les points O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si A_n appartient à l'axe $(O\,;\,\vec{u})$ ce qui équivaut à $\arg z_n=k\pi$ où $k\in Z$

ce qui équivaut à $\frac{n\pi}{5}=k\pi$; $n=5k$.

n est un entier naturel donc $n=5k$ où $k\in N$.

Exercise 2 **(14 points)**

Partie A : *Perpendiculaire commune à deux droites*

1- Représentation paramétrique de (d) et (Δ) :

$$(d)\ :\begin{cases} x=-2t-3 \\ y=t+4 \\ z=t+5 \end{cases} ,\ t\in R\ ;\ (\Delta)\ :\begin{cases} x=-m-4 \\ y=m-1 \\ z=-1 \end{cases} ,\ m\in R.$$

2- K est un point de (d) alors, ses coordonnées sont $K(-2t-3\,;\,t+4\,;\,t+5)$,

L est un point de (Δ) alors, ses coordonnées sont $L(-m-4\,;\,m-1\,;\,-1)$.

D'où $\overrightarrow{KL}\left(-m+2t-1\,;\,m-t-5\,;-t-6\right)$.

$\overrightarrow{KL}$ étant orthogonal à $\vec{u}(-2\,;1\,;1)$ et $\vec{v}(-1\,;1\,;0)$ alors , $\overrightarrow{KL}\,.\,\vec{u}=0$ et $\overrightarrow{KL}\,.\,\vec{v}=0$. D'où $3m-6t-9=0$ et $2m-3t-4=0$.

En résolvant le système, on obtient : $t=-2$ et $m=-1$. D'où $K(1\,;2\,;3)$ et $L(-3\,;-2\,;-1)$.

3- $\overrightarrow{KL}\left(-4\ ;\ -4\ ;\ -4\right)$, donc $KL=4\sqrt{3}$.

4- Soit (R) le plan d'équation cartésienne $x+y+z-6=0$.

a) Pour tout réel t, $(-2t-3)+(t+4)+(t+5)-6=0$ donc , tout point de (d) appartient au plan (R) alors , (d) est incluse dans (R).

Pour tout réel m , $(-m-4)+(m-1)+(-1)-6=-12\neq 0$ donc , aucun point de (Δ) appartient au plan (R) alors , (Δ) est parallèle à (R).

b) $\vec{w}(1\,;1\,;1)$ est un vecteur normal au plan (R) et $\overrightarrow{KL}=-4\,\vec{w}$ donc la droite (LK) est perpendiculaire au plan (R) en K qui appartient au plan (R) .

c) La distance du point L au plan (R) est $LK=4\sqrt{3}$.

5- Soit E un point quelconque de (Δ) .

a) (Δ) est parallèle à (R) donc tous les points de (Δ) sont à la même distance de (R) ; la distance de E au plan (R) est $EE'=LK=4\sqrt{3}$ avec (EE') est perpendiculaire au plan (R) en E'.

b) Si Le triangle $EE'K$ est rectangle en E' donc $EF>EE'$ ce qui est équivalant à $EF>LK$.

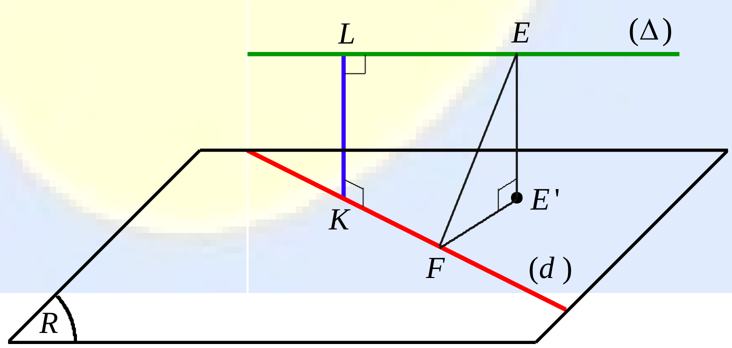


Figure 2

Partie B : *Plan médiateur d'un segment*

1- Un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de l'espace appartient au plan médiateur (P) du segment $[AB]$ si et seulement si $MA = MB$ ce qui équivaut à $(x+3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=(x+4)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$.
Après simplification, on obtient une équation cartésienne du plan (P) médiateur de $[AB]$:
$x+5y+6z-16=0$.

2- a) Soit $I\left(-\frac{7}{2};\frac{3}{2};2\right)$ le milieu de $[AB]$.

Les coordonnées de I vérifient l'équation de (P) donc le milieu de $[AB]$ appartient à (P).

b) D'après l'équation du plan (P), $\overrightarrow{AB}(-1;-5;-6)$ est un vecteur normal à (P).

3- Soit (d_1) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3\lambda - 2 \\ y = \lambda + 4 \\ z = -\lambda \end{cases}$, $\lambda \in R$.

Le point $C(3\lambda-2\ ;\ \lambda+4\ ;\ -\lambda)$ de (d_1) est équidistant de A et B si et seulement s'il appartient au plan (P) ce qui équivaut à $3\lambda-2+5(\lambda+4)+6(-\lambda)-16=0$; $\lambda=-1$.
Alors le point $C(-5\ ;\ 3\ ;\ 1)$ est le point de (d_1) qui est équidistant de A et B .

4- L'ensemble des points de (Q) qui sont équidistants de A et B est l'ensemble des points de (Q) qui appartiennent au plan (P).
Le plan (Q) est non orthogonal à la droite (AB) alors que (P) est orthogonal à la droite (AB) donc (P) et (Q) se coupent suivant une droite qui est l'ensemble des points de (Q) qui sont équidistants de A et B .

Exercise 3 (16 points)

Partie A

1- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}=+\infty$.

La courbe (C) admet en O une demi tangente verticale qui est l'axe des ordonnées .

2- $f(x)=\sqrt{x}\times e^{-x}$ donc si $x\neq 0$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}-e^{-x}\sqrt{x}=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}e^{-x}$.

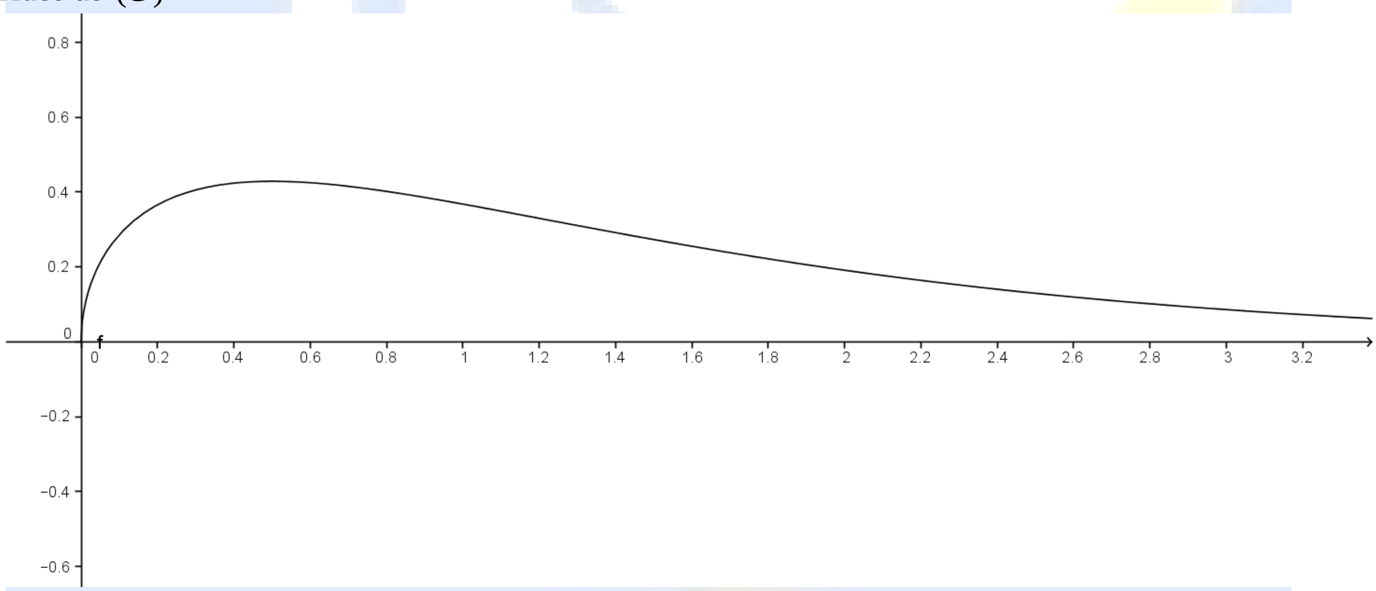
$f'(x)>0$ pour $0<x<\dfrac{1}{2}$, alors f est strictement croissante.

$f'(x)<0$ pour $x>\dfrac{1}{2}$, alors f est strictement décroissante.

3- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$.

L'axe des abscisses $x'x$ est une asymptote à (C).

4- Tracé de (C)



Partie B

1- a) Pour $x > 0$, l'équation $f(x) = x$ équivaut à $e^{-x} = \sqrt{x}$ ce qui équivaut $-x = \dfrac{1}{2}\ell nx$; $g(x) = 0$.

b) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{x} + 2 > 0$, donc g est strictement croissante.

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$; g est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ alors ,

l'intervalle image de $]0\,;+\infty[$ est l'ensemble R des nombres réels .

Comme 0 appartient à l'intervalle image, d'après le théorème de la bijection, il existe α unique dans $]0\,;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

$g(0{,}4) = -0{,}116$ et $g(0{,}5) = 0{,}307$ donc $\alpha \in [0{,}4\,;0{,}5]$.

2- α est solution de l'équation $g(x) = 0$ ceci équivaut à α est solution de l'équation $f(x) = x$.

Par suite α est l'abscisse du point d'intersection de (C) avec la droite d'équation $y = x$.

$\alpha \in [0{,}4\,;0{,}5]$ donc 0,45 est une valeur approchée de α .

3- Comme f est strictement croissante sur $[0{,}4\,;\,0{,}5]$ alors , si $x \in [0{,}4\,;\,0{,}5]$, $f(x) \in [f(0{,}4)\,;\,f(0{,}5)]$ avec $f(0{,}4) = 0{,}424$ et $f(0{,}5) = 0{,}428$; par suite $f(x) \in [0{,}4\,;\,0{,}5]$.

4- On définit la suite u par $u_0 = 0{,}4$ et , pour tout n de N , $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Par récurrence :

$u_0 = 0{,}4$ donc $u_0 \in [0{,}4\,;\,0{,}5]$.

Si , pour un certain n , $u_n \in [0{,}4\,;\,0{,}5]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0{,}4\,;\,0{,}5]$ d'après B.3.

Par suite, pour tout n, $u_n \in [0{,}4\,;\,0{,}5]$.

b) Par récurrence :

$\alpha \in [0{,}4\,;0{,}5]$ donc $|u_0 - \alpha| = |\alpha - 0{,}4| \le 0{,}1 \times \dfrac{1}{8^0}$.

Si $|u_n - \alpha| \le 0{,}1 \times \dfrac{1}{8^n}$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{8}|u_n - \alpha| \le \dfrac{1}{8} \times 0{,}1 \times \dfrac{1}{8^n}$, donc $|u_{n+1} - \alpha| \le 0{,}1 \times \dfrac{1}{8^{n+1}}$.

Par suite, pour tout n, $|u_n - \alpha| \le 0{,}1 \times \dfrac{1}{8^n}$.

c) On a $0 < |u_n - \alpha| \le 0{,}1 \times \dfrac{1}{8^n}$ et $\lim\limits_{n\to +\infty} \left(\dfrac{1}{8}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{8} < 1$, d'après le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{n\to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$. Par suite u converge vers α .

5- u_n est une valeur approchée de α à 10^{-6} près si et seulement si $|u_n - \alpha| \leq 10^{-6}$.

Pour cela il suffit d'avoir $0{,}1 \times \frac{1}{8^n} \leq 10^{-6}$, ce qui équivaut à $8^n \geq 10^5$, donc $n \geq \frac{5\ell n 10}{\ell n 8} \approx 5{,}54$.

D'où $n_0 = 6$.

Partie C

1- F est une intégrale fonction de sa borne supérieure donc $F'(x) = f(x) \geq 0$ alors, F est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2- $t - \sqrt{t} + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ donc $\sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$.

Comme $\sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$, alors $\sqrt{t} \times e^{-t} \leq \left(t + \frac{1}{4}\right) \times e^{-t}$ car $e^{-t} > 0$.

Or l'intégrale conserve les inégalités sur $[0\,;\,x]$, on déduit que $F(x) \leq \int_0^x e^{-t}\left(t + \frac{1}{4}\right)dt$.

3- $H'(t) = e^{-t}(-at + a - b)$.

H est une primitive de h sur $[0\,;\,+\infty[$ si et seulement si, pout tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $H'(t) = h(t)$.

Par identification on trouve $a = -1$ et $b = -\frac{5}{4}$.

4- $\int_0^x e^{-t}\left(t + \frac{1}{4}\right)dt = H(x) - H(0) = e^{-x}\left(-x - \frac{5}{4}\right) + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$ car $x \geq 0$.

D'autre part, $F(x) \geq 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction positive, on déduit que $0 \leq F(x) \leq \frac{5}{4}$.

Exercise 4 **(9 points)**

1- $P(X > 8) = e^{-8\lambda} = 0{,}383$ alors $-8\lambda = \ell n(0{,}383)$ d'où $\lambda = 0{,}119965 \approx 0{,}12$ à 10^{-4} près .

2- $P(X \geq 3) = e^{-3\lambda} = 0{,}698$.

La probabilité qu'un oscilloscope fonctionne plus de 3 ans est égale à 0,698.

3- La probabilité qu'un oscilloscope fonctionne plus de 10 ans sachant qu'il a déjà fonctionné pendant deux ans est égale à la probabilité qu'il fonctionne au moins 8 ans (10- 2 = 8) car la loi exponentielle est sans mémoire.

Alors $P_{X \geq 2}(X > 10) = P(X > 8) = e^{-8\lambda} = 0{,}383$

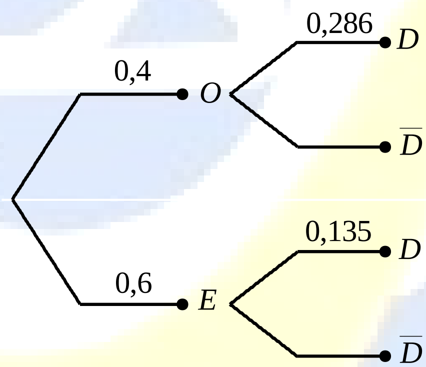
4- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}12} = 8{,}333$.

La durée de vie moyenne d'un oscilloscope est environ 8 ans et 4 mois.

5- Connaissant les durées de vie moyennes relatives aux oscilloscopes produits par chacun des fournisseurs, on peut déduire les valeurs respectives des paramètres :

Pour le fournisseur « Oscillo » : $\lambda_1 = \dfrac{1}{8}$.

Pour le fournisseur « Electro » : $\lambda_2 = \dfrac{1}{5}$.



a) $P_O(D) = e^{-10\lambda_1} = e^{-\frac{5}{4}} = 0{,}286$.

b) On a besoin de $P_E(D) = e^{-10\lambda_2} = e^{-2} = 0{,}135$.

Arbre pondéré .

c) Les événements O et E sont opposés ,

d'après la loi des probabilités totales :

$P(D) = P(D \cap O) + P(D \cap E) = 0{,}1954$.

d) $P_D(E) = \dfrac{P(E \cap D)}{P(D)} = 0{,}414$.