LEBANESE UNIVERSITY
FACULTY OF ENGINEERING

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2018 - 2019 — ***Mathématiques*** — ***Durée : 3 heures***

La distribution des notes est sur 50 — ***Bac. Libanais*** — ***7 Juillet 2018***

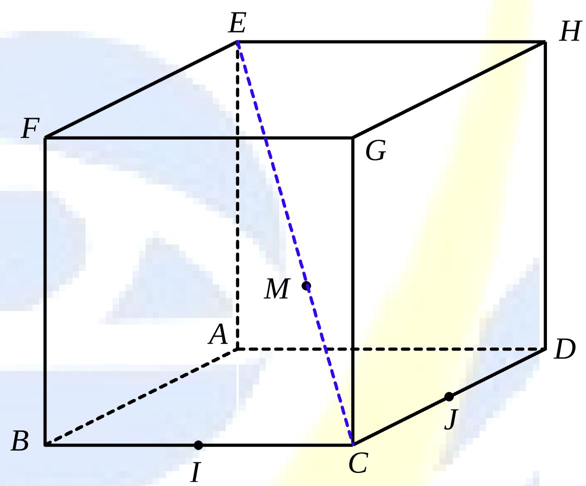
Exercice 1 (10 points)

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1 ; I et J sont les milieux respectifs de $[BC]$ et $[CD]$.

On rapporte l'espace au repère orthonormé direct $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$.

1- a) Déterminer les coordonnées des points E , I et J et montrer que $EI = EJ$.

b) En déduire que , pour tout point M de la droite (CE) , le triangle MIJ est isocèle en M .



2- *Le but de cette partie est de déterminer la position du point M sur (CE) pour laquelle l'angle $I\hat{M}J$ est maximum.*

Soit θ la mesure en radians de l'angle $I\hat{M}J$.

a) Montrer que $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{IJ}{2MI}$.

b) Justifier que $I\hat{M}J$ est maximum lorsque MI est minimum.

c) Montrer qu'il existe une seule position M_0 de M sur (CE) pour laquelle l'angle $I\hat{M}J$ est maximum.

3- a) Déterminer les coordonnées de M_0 .

b) Vérifier que M_0 appartient au segment $[CE]$.

c) Déterminer , la valeur maximale de θ .

Exercice 2 (8 points)

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules vertes indiscernables au toucher.
Un enfant tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne .
Pour $n \in \{0\,;1\,;2\}$, on note A_n l'événement : " l'enfant a obtenu n boules vertes " .

1- Calculer les probabilités $p(A_0)$, $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

2- Sachant que l'enfant a au moins une boule rouge, calculer la probabilité qu'il ait 2 boules rouges .

3- Après le premier tirage , il reste 4 boules dans l'urne de laquelle l'enfant tire deux boules simultanément.
a) Sachant que les deux premières boules tirées sont rouges , calculer la probabilité que les deux dernières boules soient aussi rouges .
b) Calculer la probabilité que l'enfant ait obtenu les 4 boules rouges aux deux tirages.
c) Calculer la probabilité que , au deuxième tirage, l'enfant obtienne 2 boules rouges.

4- Soit l'événement E : " il lui a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules vertes soient extraites de l'urne ". Montrer que $p(E)=\frac{1}{3}$.

Exercice 3 **(10 points)**

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
Soit f l'application de $(P)-\{O\}$ dans (P) qui , à tout point M d'affixe z ($z\neq 0$) , associe le point N d'affixe z' définie par : $z'=z-\frac{1}{z}$.

1- a) Déterminer les points dont l'image par f est le point O.
b) Déterminer le point dont l'image par f est le point E d'affixe $2i$.

2- Montrer que tout point N du plan (P), sauf deux points à déterminer , a deux antécédents par f .

3- Soit $z=re^{i\theta}$ ($r>0$) la forme exponentielle de l'affixe z d'un point M .
a) Calculer les coordonnées x' et y' de l'image N de M en fonction de r et θ .
b) Montrer que , quand M varie sur le cercle (C) de centre O et de rayon 2 , N varie sur une ellipse (E) à déterminer avec son excentricité .
c) Montrer que , quand M varie sur la demi droite $]Ot)$ de vecteur directeur $\vec{u}+\vec{v}$, N varie sur une hyperbole (H) de centre O à déterminer avec son excentricité .

4- a) Montrer que (E) et (H) ont les mêmes foyers F et F' à déterminer.
b) Tracer (E) et (H) dans le même repère . (***unité graphique :*** 2 ***cm***)

Exercice 4 **(14 points)**

Soit f une fonction définie et <u>deux fois dérivable</u> sur l'ensemble IR des nombres réels , telle que

$$\begin{cases} f'(0)=1 \\ Pour\ tout\ réel\ x\ ,\ (f'(x))^2-(f(x))^2=1 \quad (1) \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$. (***Unité graphique : 1 cm***)

1- Calculer $f(0)$ et montrer que (C) est tangente à la droite (d) d'équation $y=x$.

2- a) Montrer que , pour tout réel x , $f'(x)\neq 0$.
b) En déduire que , pour tous réels a and b , $f'(a)\times f'(b)>0$.
c) Calculer $f'(x)\times f'(0)$. En déduire que , pour tout réel x , $f'(x)>0$.
d) En dérivant les deux membres de la relation (1), montrer que , pour tout réel x , $f''(x)=f(x)$.

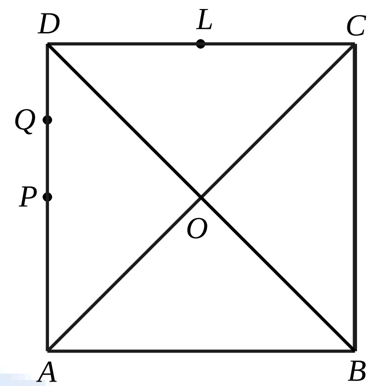
3- Soit g et h les fonctions définies sur IR par $g=f'+f$ et $h=f'-f$.
a) Calculer $g(0)$ et $h(0)$.
b) Justifier que g et h sont dérivables sur IR et montrer que $g'=g$ and $h'=-h$.
c) Déduire les fonctions g et h , puis montrer que , pour tout réel x , $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.

4- a) Dresser le tableau de variations de f .
b) Montrer que , pour tout réel λ , l'équation $f(x)=\lambda$ a une solution unique , puis calculer cette solution en fonction de λ .
c) Tracer (C).

5- a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont le domaine de définition est à déterminer .
b) Tracer la courbe représentative (C') de f^{-1} dans le même repère que (C).

6- On note α l'ordonnée du point A de (C) d'abscisse 2.
Soit (Δ) la droite de coefficient directeur -1 passant par A .
a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A' de (Δ) et (C') en fonction de α .
b) Montrer que l'aire du triangle OAA' est $S=\dfrac{\alpha^2-4}{2}\ cm^2$.
c) En déduire l'aire du domaine limité par les courbes (C), (C') , (Δ) et situé au dessus de l'axe des abscisses .

Exercice 5 **(8 points)**



$ABCD$ est un carré direct de centre O tel que $AB = 4$.
Soit L , P et Q les milieux de $[DC]$, $[AD]$ et $[DP]$ respectivement .
Soit S la similitude qui transforme A en O et B en L.

1- Déterminer le rapport et l'angle de S.

2- a) Déterminer l'image de chacune des droites (BC) et (AC) par S.

b) En déduire $S(C)$.

3- On considère les similitudes $S_1(D\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{\pi}{4})$ et $S_2(O\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{\pi}{4})$.

a) Déterminer $S_2 \circ S_1(A)$ et montrer que $S_2 \circ S_1 = S$.

b) Déduire $S(D)$ et montrer que $S(L) = Q$.

4- On note I le centre de S et h la transformation $S \circ S$.

a) Déterminer $h(B)$ et $h(C)$.

b) Justifier que h est une homothétie à déterminer .

c) En déduire que I est le point d'intersection des deux droites (BQ) et (CP).

d) Montrer que I appartient au cercle (γ) de diamètre $[DC]$ et que (BQ) est la tangent à (γ) en I .

LEBANESE UNIVERSITY
FACULTY OF ENGINEERING

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2018 - 2019 — *Solution de Mathématiques* — *Durée : 3 heures*

La distribution des notes est sur 50 — *Bac. Libanais* — *7 Juillet 2018*

Exercise 1 (**10 points**)

1- a) In the system $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE})$, $E(0\,;0\,;1)$.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, then $C(1\,;1\,;0)$.

I is the mid point of $[BC]$ where $B(1\,;0\,;0)$ and $C(1\,;1\,;0)$, then $I(1\,;\frac{1}{2}\,;0)$.

J is the mid point of $[CD]$ where $C(1\,;1\,;0)$ and $D(0\,;1\,;0)$, then $J(\frac{1}{2}\,;1\,;0)$.

Therefore , $EI=EJ=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

b) $CI=CJ=\dfrac{1}{2}$ and $EI=EJ$, then C and E belong to the mediator plane (L) of $[IJ]$, then (CE) lies in the plane (L) ; therefore M belongs to (L) and $MI=MJ$.

Consequently , the triangle MIJ is isosceles at M .

2- a) The triangle MIJ is isosceles at M and θ is the measure of the angle $I\hat{M}J$, then $\dfrac{\theta}{2}$ is the measure of the angle $I\hat{M}K$ where K is the mid point of $[IJ]$.

The triangle MIK is right at K , then

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{IK}{MI}=\frac{IJ}{2\,MI}.$$

b) $I\hat{M}J$ is maximum when $\dfrac{\theta}{2}$ is maximum ;

that is when $\sin\dfrac{\theta}{2}$ is maximum since $0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$.

Therefore , $I\hat{M}J$ is maximum when MI is minimum since IJ is constant .

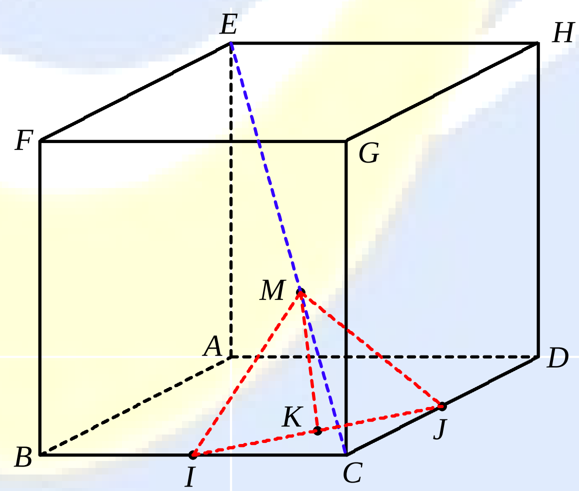


Figure 10

c) As M varies on (CE), I remaining fixed ,
MI is minimum when M is at M_0 , the orthogonal
projection of I on (EC) .

3- a) $C(1\,;1\,;0)$, $\overrightarrow{CE}(-1\,;-1\,;1)$ and $\overrightarrow{CM}=\lambda\,\overrightarrow{CE}$, then a system of parametric equations of (CE) is :
$(x=-\lambda+1\ ;\ y=-\lambda+1\ ;\ z=\lambda)$ where $\lambda\in IR$.

$M\in(CE)$, then $M(-\lambda+1\,;-\lambda+1\,;\lambda)$ and $\overrightarrow{IM}(-\lambda\ ;-\lambda+\frac{1}{2}\ ;\lambda)$

M_0 is such that $\overrightarrow{CE}\,.\,\overrightarrow{IM_0}=0$; that is $\lambda+\lambda-\frac{1}{2}+\lambda=0$; therefore $\lambda=\frac{1}{6}$ and $M_0(\frac{5}{6};\frac{5}{6};\frac{1}{6})$.

b) $\lambda=\frac{1}{6}$, then $\overrightarrow{CM_0}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CE}$; therefore , M_0 belongs to the segment $[CE]$.

c) The maximum of θ is such that $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{IJ}{2\,IM_0}$ where $IJ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ and $IM_0=\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$;

therefore $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ with $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$, then $\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{3}$ rad ; $\theta=\frac{2\pi}{3}$ rad .

Exercise 2 **(8 points)**

1- The sample space is equibrobable and consists of ${}_6C_2$ possible outcomes .

$p(A_0)=\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$; $p(A_1)=\frac{{}_4C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$ and $p(A_2)=\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$.

2- Let L be the event: " the child has at least one red ball " is the opposite of the event " no red ball is drawn "

which is the event A_2 , then $p(L)=1-p(A_2)=\frac{14}{15}$.

The required probability is $p\left(A_0/L\right)=\frac{p(A_0\cap L)}{p(L)}=\frac{p(A_0)}{p(L)}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$.

3- After the first draw, there remains 4 balls in the urn from which the child draws two new balls .

a) If the first two balls were red , then , for the second draw , the urn will contain 2 red balls and 2 green balls ; therefore , the required probability is $p_1=\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$.

b) The required probability is $p_2 = p(A_0)\times p_1 = \frac{2}{5}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{15}$.

c) Let B be the event : " the child get 2 red balls in the second draw "

$$p(B) = p(B\cap A_0) + p(B\cap A_1) + p(B\cap A_2)$$
$$= p(A_0)\times p(B/A_0) + p(A_1)\times p(B/A_1) + p(A_2)\times p(B/A_2).$$
$$= \frac{1}{15} + \frac{8}{15}\times\frac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_4C_2} + \frac{1}{15}\times 1 = \frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}\ .$$

4- The event E is realized when either one of the following incompatible events is :
" he draws one green ball in each draw " ;
" he draws no green ball in the first draw and two green balls in the second " .

Therefore $p(E) = p(A_1)\times\frac{1\times{}_3C_1}{{}_4C_2} + p(A_0)\times\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{8}{15}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\times\frac{1}{6} = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$.

Exercise 3 **(10 points)**

1- a) The equation $z - \frac{1}{z} = 0$ is equivalent to $z^2 = 1$; that is $z = -1$ or $z = 1$ then , the points whose image by f is the origin O are the points with affixes $z = -1$ and $z = 1$.

b) The equation $z - \frac{1}{z} = 2i$ is equivalent to $z^2 - 2iz - 1 = 0$; that is $(z-i)^2 = 0$; $z = i$ then , the point whose image by f is the point E is the point with affix $z = i$.

2- The affixes of the antecedents of a point N of affix z' are the solutions of the equation $z - \frac{1}{z} = z'$ which is equivalent to $z^2 - z'z - 1 = 0$.

The equation $z^2 - z'z - 1 = 0$, which is of the second degree , has two roots except when $\Delta = 0$; that is $z'^2 + 4 = 0$; $z = 2i$ or $z = -2i$.

Therefore , any point N of plane (P), except $E(2i)$ and $E'(-2i)$, has two antecedents by f .

3- Let $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$) be the exponential form of z .

a) The affix of N is $z' = z - \frac{1}{z} = re^{i\theta} - \frac{1}{re^{i\theta}} = re^{i\theta} - \frac{1}{r}e^{-i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) - \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$;

$z' = \left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\theta$; therefore $x' = \left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\theta$ and $y' = \left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\theta$.

b) M varies on the circle (C) of centre O and radius 2 , then $OM = r = 2$. therefore the coordinates of N become : $x' = \frac{3}{2}\cos\theta$ and $y' = \frac{5}{2}\sin\theta$.

Therefore , N varies on the ellipse (E) of equation $\dfrac{x^2}{\frac{9}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{25}{4}}=1$.

For the ellipse (E), $a=\dfrac{5}{2}$ and $b=\dfrac{3}{2}$ then $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$ and the eccentricity is $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$.

c) M varies on the semi straight line $]Ot)$ of direction vector $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, then $\theta=\dfrac{\pi}{4}$; therefore the coordinates of N become : $x'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(r-\dfrac{1}{r}\right)$ and $y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)$.

$x'^2=\dfrac{1}{2}\left(r^2+\dfrac{1}{r^2}-2\right)$ and $y'^2=\dfrac{1}{2}\left(r^2+\dfrac{1}{r^2}+2\right)$, then $y'^2-x'^2=2$.

Therefore , N varies on the equilateral hyperbola (H) of equation $y^2-x^2=2$.

(H) is an equilateral hyperbola , then its eccentricity is $e'=\sqrt{2}$.

4- a) The center of (E) is O ; the focal axis is the axis of ordinates ; $c=2$, then the foci of (E) are the points $F(0\,;2)$ and $F'(0\,;-2)$.

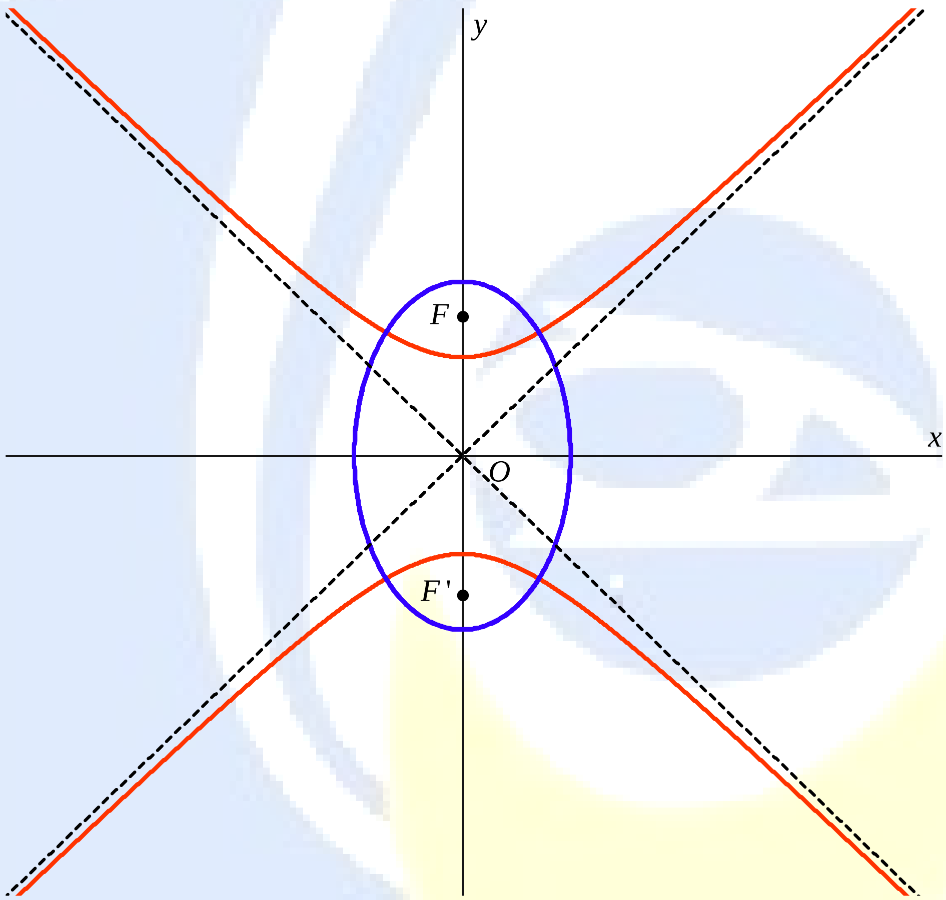
The center of (H) is O ; the focal axis is the axis of ordinates , $a=b=\sqrt{2}$ then , $c=a\sqrt{2}=2$ and the foci of (H) are also the points F and F'.

b) The vertices of (E) are $A(0\,;\frac{5}{2})$, $A'(0\,;-\frac{5}{2})$, $B(\frac{3}{2}\,;0)$ and $B'(-\frac{3}{2}\,;0)$.

The vertices of (H) are $C(0\,;\sqrt{2})$ and $C'(0\,;-\sqrt{2})$.

The asymptotes of (H) are the straight lines of equations $y = x$ and $y = -x$.

Drawing (E) and (H) in the same system .



<u>Exercise 4</u> **(14 points)**

1- By applying the relation (1) to the real number 0, we find $f(0)=0$.
$f(0)=0$ and $f'(0)=1$, then an equation of the tangent to (C) at the point $(0\,;1)$ is $y=x$.

2- a) The relation (1) gives , $(f'(x))^2=1+(f(x))^2\neq 0$ then , for all x in IR, $f'(x)\neq 0$.

b) The function f' is differentiable , then it is continuous on IR .
If there exists two real numbers a and b such that $f'(a)f'(b)<0$, then there exists a real number
x_0 belonging to $]a\,;b[$ $(a<b)$ such that $f'(x_0)=0$ which is impossible since for all x in IR, $f'(x)\neq 0$. Therefore , for all real numbers a and b, $f'(a)f'(b)>0$.

c) $f'(0)=1$, then $f'(x)f'(0)=f'(x)$, then for all x in IR, $f'(x)>0$.

d) By differentiating the two members of the relation (1), we find : $f'(x)\times f''(x)-f(x)\times f'(x)=0$
where $f'(x)\neq 0$, then for all x in IR, $f''(x)-f(x)=0$; that is $f''(x)=f(x)$.

3- The functions g and h are defined on IR , by $g=f'+f$ and $h=f'-f$.

a) $g(0)=f'(0)+f(0)=1$ and $h(0)=f'(0)-f(0)=1$.

b) The two functions f and $f'$are differentiable on IR, then g and h are differentiable on IR.
$g'=(f+f')'=f'+f''=f'+f=g$ and $h'=(f-f')'=f'-f''=f'-f=-h$.

c) $g'=g$, then g is a solution of the differential equation $y'-y=0$, then $g(x)=Ce^x$.
$g(0)=1$, then $C=1$; therefore , $g(x)=e^x$.
Similarly , $h(x)=e^{-x}$.

$g=f'+f$ and $h=f'-f$ give $g-h=2f$, then for all x in IR, $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

4- a) $\lambda im_{x\to+\infty}\ e^x=+\infty$ and $\lambda im_{x\to-\infty}\ e^x=0$;
then $\lambda im_{x\to+\infty}\ f(x)=+\infty$.

Similarly , $\lambda im_{x\to-\infty}\ f(x)=-\infty$.

$f'(x)>0$.
Table of variations of f .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Figure 25

b) f is continuous and strictly increasing and $f(IR)=IR$, then for all values of λ in IR, the equation
$f(x)=\lambda$ has a unique solution.
The equation $f(x)=\lambda$ is equivalent to $e^x-e^{-x}=2\lambda$; that is $e^{2x}-2\lambda e^x-1=0$ with $e^x>0$
The quadratic equation $t^2-2\lambda t-1=0$ of discriminant $\Delta'=\lambda^2+1>0$ has only one positive root

$t=\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}$, then $e^x=\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}$; therefore $x=\ell n(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1})$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{e^{-x}}{x}\right)=+\infty$, then (C) has at $+\infty$ and at $-\infty$ an asymptotic direction parallel to the axis of ordinates .

Drawing (C) .

5- a) f is continuous and strictly increasing , then that f has an inverse function f^{-1} defined on $f(IR)=IR$.

b) Drawing (C') (by symmetry with respect to the straight line (d) of equation $y=x$) .

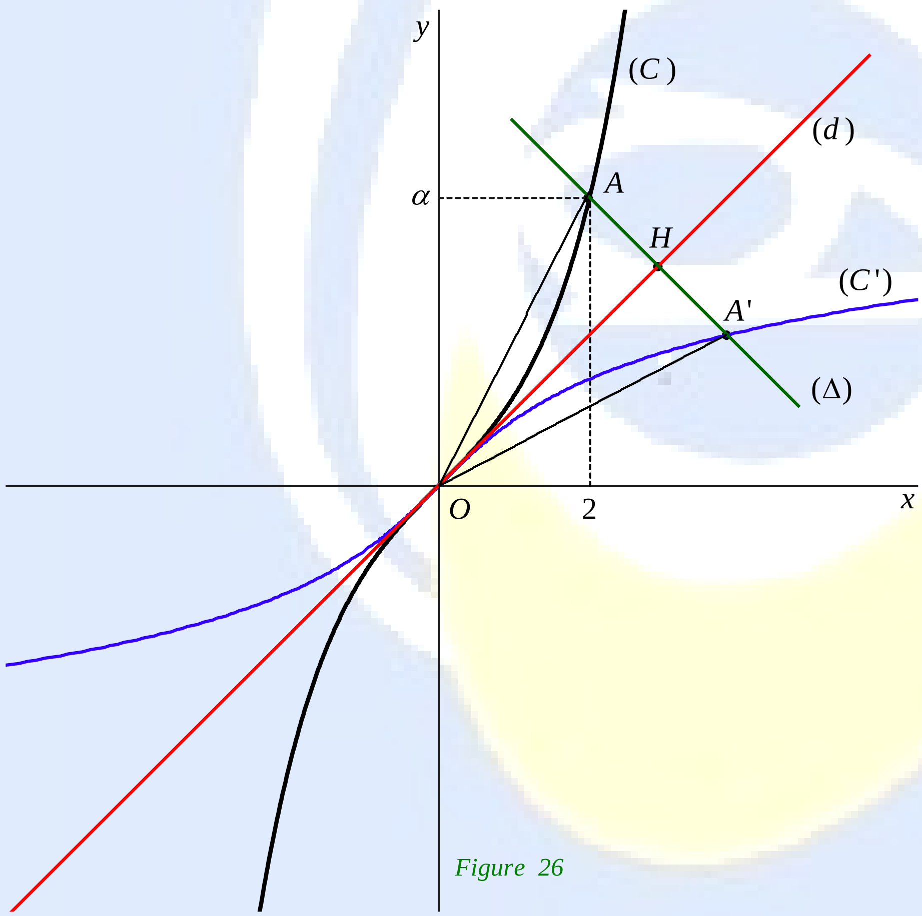


Figure 26

6- $A(2\,;\alpha)$ belongs to (C) ; (Δ) is the straight line of slope -1 passing through A .

a) (C) and (C') are symmetric with respect to (d) ; then the straight line (Δ) which is the perpendicular to (d) passing through A will cut (C') at the point A' symmetric of A with respect to (d), then $A'(\alpha\,;2)$.

b) The mid point of $[AA']$ is $H(\frac{\alpha+2}{2}\,;\frac{\alpha+2}{2})$.

The area of the triangle OAA' is $S = OH \times AH = \ \ cm^2$ where :

$OH = \frac{\alpha+2}{\sqrt{2}}$ and $AH = \frac{\alpha-2}{\sqrt{2}}$, $(\alpha \approx 3.6 > 2)$; therefore $S = \frac{\alpha^2-4}{2}\ cm^2$.

c) The area of the domain bounded by (C), (C') and (Δ) is equal to $S - 2S'$ *units of area* where S' is the area of the domain bounded by (C), and the straight line (OA) lying above the axis of abscissas .

$A(2\,;\alpha)$, then an equation of the straight line (OA) is $y = \frac{\alpha}{2}x$.

$$S' = \int_0^2 \left(\frac{\alpha}{2}x - f(x)\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{2}x^2 - e^x - e^{-x}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(2\alpha - e^2 - e^{-2}\right) - \frac{1}{2}(-1-1)\ ;$$

$$S' = \frac{1}{2}\left(2\alpha - e^2 - e^{-2} + 2\right)\ cm^2.$$

Therefore , the required area is $A = e^2 + e^{-2} + \frac{\alpha^2 - 4\alpha - 8}{2}\ cm^2$.

Exercise 5 **(8 points)**

1- $S(A) = O$ and $S(B) = L$ where

$\frac{OL}{AB} = \frac{1}{2}$ and $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{OL}) = \frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$.

Therefore the ratio of S is $\frac{1}{2}$ and its angle is $\frac{\pi}{2}$.

2- S is a similitude of angle $\frac{\pi}{2}$, then any straight line and its image are perpendicular .

a) $S(B) = L$, then $S((BC)) = (DC)$.

$S(A) = O$, then $S((AC)) = (DB)$.

b) C is the point of intersection of (AC) and (BC) ;

$S((AC)) = (DB)$ and $S((BC)) = (DC)$, then the image of C is the point of intersection D of (DB) and (DC);

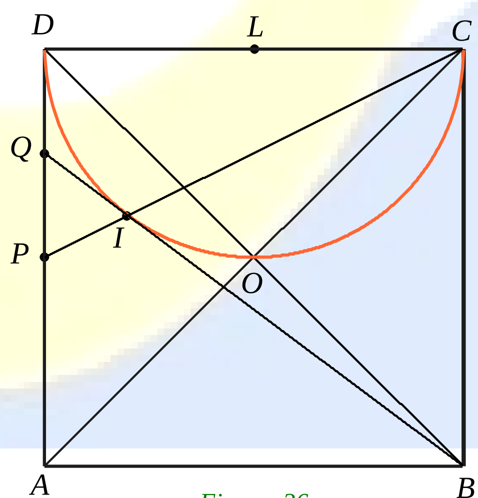


Figure 36 a

$S(C) = D$.

3- a) $S_1 = S(D\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{\pi}{4})$ and $S_2 = S(O\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{\pi}{4})$.

$S_2 \text{o} S_1(A) = S_2(O) = O$.

$S_2 \text{o} S_1$ is a similitude of ratio $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ and angle $2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.

The similitudes $S_2 \text{o} S_1$ and S have same ratio , same angle and $S_2 \text{o} S_1(A) = S(A)$; therefore $S_2 \text{o} S_1 = S$.

b) $S(D) = S_2 \text{o} S_1(D) = S_2(S_1(D)) = S_2(D) = P$ since $OC = \frac{\sqrt{2}}{2} OD$ and $(\overrightarrow{OD}\,;\,\overrightarrow{OP}) = \frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)$.

$S(C) = D$, $S(D) = P$ and L is the mid point of $[DC]$, then $S(L) = Q$, the mid point of $[DP]$.

4- a) $h(B) = S \text{o} S(B) = S(L) = Q$; $h(C) = S \text{o} S(C) = S(D) = P$.

b) $S = Sim(I\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{\pi}{2})$, then $h = S \text{o} S = Sim(I\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\pi)$. Therefore h is the dilation $(I\,;\,-\frac{1}{4})$.

$h(B) = Q$, then $I \in (BQ)$; $h(C) = P$, then $I \in (CP)$. Therefore , I is the point of intersection of the two straight lines (BQ) and (CP).

c) $S(C) = D$, then $(\overrightarrow{IC}\,;\,\overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$; therefore , I belongs to the circle (γ) .

d) $S(L) = Q$, then $(\overrightarrow{IL}\,;\,\overrightarrow{IQ}) = \frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$; therefore , (LI) is perpendicular to (BQ) at I ; therefore (BQ) is the tangent to (γ) at I .

Concours d'entrée 2018 - 2019 | *Mathématiques* | *Durée : 3 heures*
La distribution des notes est sur 50 | *(Programme : Bac Français)* | *7 Juillet 2018*

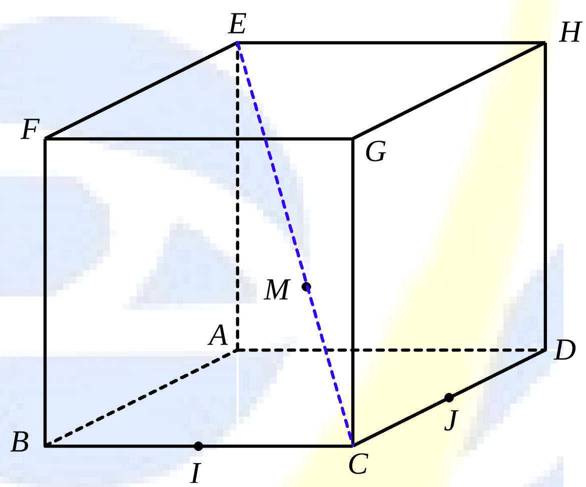
Exercice 1 (10 points)

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1 ; I et J sont les milieux respectifs de $[BC]$ et $[CD]$.

On rapporte l'espace au repère orthonormé direct $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1- a) Déterminer les coordonnées des points E , I et J et montrer que $EI = EJ$.

b) En déduire que , pour tout point M de la droite (CE) , le triangle MIJ est isocèle en M .



2- a) Montrer que la droite (AF) est perpendiculaire au plan (EBC) .

b) En déduire une équation cartésienne du plan (EBC) .

c) On admet qu'une équation cartésienne du plan (ECD) est : $y+z-1=0$.

Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (EC) est $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=-t+1 \\ z=t \end{cases}$, $t \in R$.

3- *Le but de cette partie est de déterminer la position du point M sur (CE) pour laquelle l'angle $\hat{IMJ}$ est maximum .*

Soit θ la mesure en radians de l'angle $\hat{IMJ}$.

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{JM}$ en fonction de t . En déduire que $\cos\theta = \dfrac{3t^2-t}{3t^2-t+\frac{1}{4}} = f(t)$.

b) Etudier les variations de la fonction f et en déduire la valeur maximale de θ .

Exercice 2 **(10 points)**

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=10$, $b=2-2i\sqrt{3}$, $c=3+3i\sqrt{3}$ et $d=-2$.

1- a) Déterminer la forme exponentielle de chacun des nombres b et c.

b) Faire une figure et placer les points A, B, C, D.

2- a) Calculer $\dfrac{a-b}{a-c}$ et écrire ce nombre sous forme exponentielle .

b) Donner une interprétation géométrique de $\left|\dfrac{a-b}{a-c}\right|$ et de $\arg\left(\dfrac{a-b}{a-c}\right)$.

En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On désigne par h l'application qui , à tout point M d'affixe z du plan , associe le point N d'affixe z' telle que $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z-2(1-e^{i\frac{\pi}{3}})$.

1- Soit Q l'image de C par h.

a) Calculer l'affixe q du point Q.

b) Vérifier que $q=-2b$. Que peut-on en déduire pour les points O, B et Q ?

2- Soit R le symétrique de C par rapport à O.

a) Montrer que les droites (AD), (BQ) et (CR) sont concourantes .

b) Montrer que $AD=BQ=CR$.

3- a) Montrer que , pour tout nombre complexe z, $z'-d=(z-d)e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) En déduire que , si M est distinct de D, alors le triangle DMN est équilatéral tel que $(\overrightarrow{DM}\,;\overrightarrow{DN})=\dfrac{\pi}{3}$.

Exercise 3 **(8 points)**

On considère la suite numérique (I_n) définie pour tout entier naturel $n\geq 2$ par $I_n=\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\,dx$.

1- a) Calculer I_2 . Interpréter le résultat graphiquement .

b) Montrer que , pour tout entier naturel $n\geq 2$, $I_n>0$.

2- a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante .

b) Justifier que (I_n) est convergente .

3- a) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x^{n-1}}e^{\frac{1}{x}}$.

Montrer que $g'(x)=\dfrac{1-n}{x^n}e^{\frac{1}{x}}-\dfrac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$. En déduire que , pour tout $n\geq 2$, $I_{n+1}=e-\dfrac{\sqrt{e}}{2^{n-1}}-(n-1)I_n$.

b) Calculer I_3 .

4- a) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,2]$ et pour tout entier naturel $n\geq 2$, $0\leq \dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\leq \dfrac{e}{x^n}$.

b) En déduire que , pour tout entier naturel $n\geq 2$, $0\leq I_n\leq \dfrac{e}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.

c) Déterminer la limite de la suite (I_n) .

<u>Exercice 4</u> **(8 points)**

Une entreprise fabrique des vêtements de sport pouvant présenter deux types de défaut indépendants : défaut de tissu et défaut de confection .
▪ la probabilité que le tissu présente un défaut est 0,02.
▪ la probabilité d'un défaut de confection est 0,05.
1- Calculer la probabilité qu'un vêtement ait les deux défauts.
2- Montrer que la probabilité qu'un vêtement soit sans défaut est 0,931.
3- En une semaine, l'entreprise fabrique 1000 vêtements.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de vêtements sans défaut fabriqués en une semaine.
a) Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance et son écart-type.
b) Pourquoi la loi de la variable $Y=\dfrac{X-931}{8}$ peut-elle être approchée par la loi normale centrée réduite ?
c) En utilisant cette approximation, calculer $p(923\leq X\leq 939)$.
4- Suite à l'intervention du service qualité, le gérant de l'entreprise procède à des aménagements pour réduire le nombre de pièces présentant un défaut ; il affirme aux clients que désormais 98% des pièces produites seront sans défaut. Une enquête porte sur 500 pièces produites et l'on constate 22 pièces avec défaut. Peut-on valider au seuil de 95% l'affirmation du gérant de l'entreprise ?

<u>Exercice 5</u> **(14 points)**

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur l'ensemble R des nombres réels , telle que

$$\begin{cases} f'(0)=1 \\ Pour\ tout\ réel\ x\ ,\ \ (f'(x))^2-(f(x))^2=1 \quad (1) \end{cases}.$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$. (***Unité graphique : 1 cm***)

1- Calculer $f(0)$ et montrer que (C) est tangente à la droite (d) d'équation $y = x$.

2- a) Montrer que , pour tout réel x , $f'(x) \neq 0$.

b) En déduire que , pour tous réels a and b , $f'(a) \times f'(b) > 0$.

c) Calculer $f'(x) \times f'(0)$. En déduire que , pour tout réel x , $f'(x) > 0$.

d) En dérivant les deux membres de la relation (1), montrer que , pour tout réel x , $f''(x) = f(x)$.

3- La fonction sinus hyperbolique notée « sinh » est définie sur R par : $(\sinh)(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Justifier que cette fonction est dérivable et montrer qu'elle vérifie les deux propriétés initiales de la fonction f , soit : $\begin{cases} (\sinh)'(0) = 1 \\ Pour\ tout\ réel\ x\ ,\ \ ((\sinh)'(x))^2 - ((\sinh)(x))^2 = 1 \end{cases}$.

4- On admet que la fonction f est la fonction sinus hyperbolique , soit $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

a) Etudier les variations et dresser le tableau de variations de f .

b) Montrer que , pour tout réel λ , l'équation $f(x) = \lambda$ a une solution unique , puis calculer cette solution en fonction de λ .

c) Déterminer la valeur approximative de la solution de chacune des équations $f(x) = 2$ et $f(x) = 6$ à 10^{-1} près .

d) Tracer (C).

5- On note α l'ordonnée du point A d'abscisse 2 de (C).

Soit (Δ) la droite de coefficient directeur -1 passant par A .

a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de (Δ) et (d) en fonction de α .

b) Montrer que l'aire du triangle OAH est $S = \dfrac{\alpha^2 - 4}{4}\ cm^2$.

c) En déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C) et les droites (d) et (Δ) .

Concours d'entrée 2018 - 2019 ***Mathématiques*** ***07 juillet 2018***

Solution Bac. français

Exercice 1 **(10 points)**

1- a) Dans le repère , $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE})$, $E(0\,;0\,;1)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, alors $C(1\,;1\,;0)$.

I est le milieu de $[BC]$ avec $B(1\,;0\,;0)$ et $C(1\,;1\,;0)$, alors $I(1\,;\frac{1}{2}\,;0)$.

J est le milieu de $[CD]$ avec $C(1\,;1\,;0)$ et $D(0\,;1\,;0)$, alors $J(\frac{1}{2}\,;1\,;0)$.

Par suite , $EI = EJ = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

b) $CI = CJ = \dfrac{1}{2}$ et $EI = EJ$, donc C et E appartiennent au plan médiateur (L) de $[IJ]$, alors (CE) est incluse dans le plan (L); par suite M appartient à (L) et $MI = MJ$.

Par conséquent , le triangle MIJ est isocèle en M .

2- a) Dans le carré $ABFE$: (AF) est perpendiculaire à (EB) (diagonales d'un carré) .

D'autre part, $(BC)\perp(BA)$ et $(BC)\perp(BF)$, donc $(BC)\perp(ABFE)$ et en particulier $(BC)\perp(FA)$.

Par suite (AF) est perpendiculaire au plan (EBC) car elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

b) $\overrightarrow{AF}(1:0:1)$ est un vecteur normal au plan (EBC), et ce plan passe par $E(0\,;0\,;1)$ alors une équation cartésienne du plan (EBC) est : $x+z-1=0$.

c) (EC) est la droite d'intersection des deux plans (EBC) et (EDC), alors les coordonnées d'un point

de (EC) vérifient le système : $\begin{cases} x+z-1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$.

On pose $z=t$, alors $x=y=-t+1$

3- a) $\overrightarrow{IM}(-t\,;-t+\frac{1}{2}\,;t)$ et $\overrightarrow{JM}(-t+\frac{1}{2};-t\,;t)$, alors $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{JM} = 3t^2 - t$

b) $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{JM}}{IM \times JM} = \dfrac{3t^2 - t}{3t^2 - t + \dfrac{1}{4}} = f(t)$

c) $f'(t) = \dfrac{(6t-1)\times\dfrac{1}{4}}{\left(3t^2 - t + \dfrac{1}{4}\right)^2}$, alors f est décroissante sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{6}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{6};+\infty\right[$; elle admet

un minimum en $t = \dfrac{1}{6}$ égal à $f\left(\dfrac{1}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$. La valeur minimale de $\cos\theta$ est donc $-\dfrac{1}{2}$

La fonction $x \to \cos x$ est stictement decroissante sur $]0\,;\pi[$ alors la valeur maximale de θ est $\dfrac{2\pi}{3}$ *rad* .

Exercice 2 **(10 points)**

Partie A

Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives $a = 10$, $b = 2 - 2i\sqrt{3}$, $c = 3 + 3i\sqrt{3}$ et $d = -2$.

1- a) $b = 2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4e^{-\frac{\pi}{3}i}$; $c = 3 + 3i\sqrt{3} = 6\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 6e^{\frac{\pi}{3}i}$.

b) Faire une figure et placer les points A, B, C, D.

2- a) $\dfrac{a-b}{a-c} = \dfrac{8 + 2i\sqrt{3}}{7 - 3i\sqrt{3}} = \dfrac{(8 + 2i\sqrt{3})(7 + 3i\sqrt{3})}{76} = \dfrac{38(1 + i\sqrt{3})}{76} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i}$.

b) $\left|\dfrac{a-b}{a-c}\right| = \dfrac{AB}{AC}$ et $\arg\left(\dfrac{a-b}{a-c}\right) = (\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AC})$.

Or $\left|\dfrac{a-b}{a-c}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{a-b}{a-c}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ \ (2\pi)$, donc $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}\ \ (2\pi)$.

Alors , le triangle ABC est équilatéral .

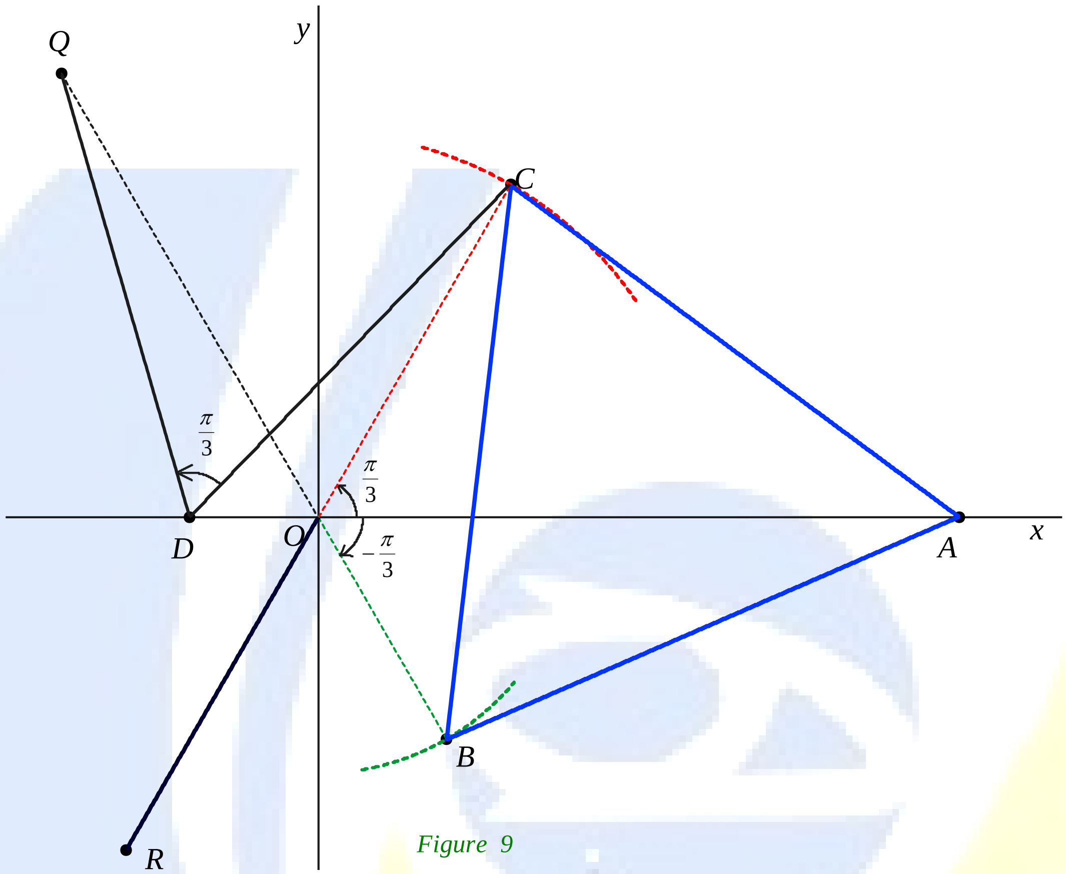


Figure 9

Partie B

h est l'application qui associe à tout point M d'affixe z du plan , le point N d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z - 2(1 - e^{i\frac{\pi}{3}})$.

1- Soit Q l'image de C par h .

a) $Q = h(C)$, alors $q = e^{i\frac{\pi}{3}} \times c - 2(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}) = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(3+3i\sqrt{3}) = -4+4i\sqrt{3} = -4+4i\sqrt{3}$.

b) $b = 2 - 2i\sqrt{3}$, alors $q = -2b$; par suite $\overrightarrow{OQ} = -2\overrightarrow{OB}$ et les points O, B et Q sont alignés .

2- a) R est le symétrique de C par rapport à O, alors les points O, C et R sont alignés .

D'autre part , A et D appartiennent à l'axe des abscisses , alors les points O, A and D sont alignés .

Finalement , les droites (AD), (BQ) et (CR) sont concourantes en O.

b) $AD = |d-a| = 12$; $BQ = |q-b| = \left|-6+6i\sqrt{3}\right| = 12$ et $CR = |r-c| = |2c| = \left|6+6i\sqrt{3}\right| = 12$.
Alors , $AD = BQ = CR$.

3- a) Pour tout nombre complexe z , $z'-d = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 2(1-e^{i\frac{\pi}{3}}) + 2 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2e^{i\frac{\pi}{3}} = (z-d)e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) La relation $z'-d = (z-d)e^{i\frac{\pi}{3}}$ donne :

- $|z'-d| = |z-d| \times \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = |z-d|$; alors $DM = DN$.
- Si M est distinct de D, alors $\dfrac{z'-d}{z-d} = e^{i\frac{\pi}{3}}$; par suite $(\overrightarrow{DM}\ ;\ \overrightarrow{DN}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Par conséquent , DMN est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{DM}\ ;\ \overrightarrow{DN}) = \dfrac{\pi}{3}$.

<u>Exercice 3</u> **(8 points)**

1- a) $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx = -\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}}dx = -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = e - \sqrt{e}$.

Pour tout x dans $]0\ ;+\infty[$, $f(x) > 0$ et $I_2 = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$, alors l'aire du domaine limité par la courbe (C) de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$ est égale à $e-\sqrt{e}$ unités d'aire .

b) Pour tout x dans $[1\ ;\ 2]$ et pour tout naturel $n \geq 2$, $\dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} > 0$ et puisque $1 < 2$ alors $I_n > 0$.

2- a) $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}dx - \int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}dx = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}(1-x)\,dx$.

Pour tout x dans $[1\ ;\ 2]$ et pour tout naturel $n \geq 2$, $\dfrac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}} > 0$ et $1-x < 0$, alors $I_{n+1} - I_n \leq 0$
et (I_n) est décroissante .

b) (I_n) est décroissante et admet 0 comme borne inferieure , alors (I_n) converge vers une limite $\lambda \geq 0$.

3- a) La fonction g est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x^{n-1}}e^{\frac{1}{x}}$.

$g(x)=x^{1-n}e^{\frac{1}{x}}$, alors $g'(x)=(1-n)\,x^{-n}e^{\frac{1}{x}}+x^{1-n}\times\dfrac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1-n}{x^n}e^{\frac{1}{x}}-\dfrac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$.

$g'(x)=\dfrac{1-n}{x^n}e^{\frac{1}{x}}-\dfrac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$, alors $\displaystyle\int_1^2 g'(x)\,dx=(1-n)\int_1^2\frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\,dx-\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}dx$; par suite

$[g(x)]_1^2=(1-n)I_n-I_{n+1}$; donc $I_{n+1}=e-\dfrac{\sqrt{e}}{2^{\,n-1}}-(n-1)I_n$.

b) Pour $n=2$, $I_3=e-\dfrac{\sqrt{e}}{2}-I_2=e-\dfrac{\sqrt{e}}{2}-e+\sqrt{e}=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

4- a) Pour tout x dans $[1\,;2]$, $\dfrac{1}{x}\leq 1$ et $0<e^{\frac{1}{x}}\leq e$, alors $0<\dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\leq\dfrac{e}{x^n}$.

b) $0<\dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\leq\dfrac{e}{x^n}$, alors $0<I_n\leq e\displaystyle\int_1^2 x^{-n}dx$ avec

$$\int_1^2 x^{-n}dx=\left[\frac{x^{1-n}}{1-n}\right]_1^2=\frac{-1}{n-1}\left(2^{1-n}-1\right)=\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \text{ ; donc } 0\leq I_n\leq\frac{e}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) .$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(1-n)=-\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}2^{1-n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e}{n-1}\left(1-2^{1-n}\right)=0$. Par suite , $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

<u>Exercice 4</u> **(8 points)**

Soit T l'événement : « le tissu présente un défaut » ; $P(T)=0{,}02$.
Soit C l'événement : « le vêtement a un défaut de confection » ; $P(C)=0{,}05$.
1- Comme les deux événements sont indépendants : $P(T\cap C)=P(T)\times P(C)=0{,}02\times 0{,}05=0{,}001$.
2- Si deux événements sont indépendants, leurs contraires le sont aussi , alors :
$P(\overline{T}\cap\overline{C})=P(\overline{T})\times P(\overline{C})=0{,}98\times 0{,}95=0{,}931.$

3- Le choix d'un vêtement est une épreuve de Bernoulli : le succès est que le vêtement ne présente pas de défaut ; $p(S) = 0{,}931$.

a) En considérant 1000 vêtements, on obtient un schéma de Bernoulli .
X suit une loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0{,}931$.
$E(X) = n \times p = 931$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = 8$.

b) Comme $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, la loi binomiale peut être approchée par la loi normale de même espérance et de même écart-type. Alors X suit sensiblement la loi N(931 ; 64).
Dans ces conditions : $E(Y) = \dfrac{E(X)-931}{8} = 0$ et $\sigma(Y) = \dfrac{\sigma(X)}{8} = 1$, alors Y suit la loi N(0 ; 1).
$p(923 \leq X \leq 939) = p(-1 \leq Y \leq 1) = 0{,}683$.

c) Hypothèse à valider : p = 0,98, fréquence observée : $f = \dfrac{478}{500}$ =0,956 .

4- Les conditions d'approximation étant vérifiées, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%

est $I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \right] = [0{,}967\ ;\ 0{,}993]$

Comme $f \notin I$, on rejette l'hypothèse au risque de 5%.

Exercise 5 **(14 points)**

1- En appliquant la relation (1) au réel 0 , on trouve $f(0) = 0$.
$f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, alors une équation de la tangente à (C) au point $(0\,;1)$ est $y = x$.

2- a) La relation (1) peut s'écrire $(f'(x))^2 = 1 + (f(x))^2 \neq 0$, alors pour tout réel x , $f'(x) \neq 0$.

b) La fonction f' est dérivable , alors elle est continue sur IR .
S'il existe deux réels a et b tels que $f'(a)f'(b) < 0$, alors il existe un réel x_0 dans $]a\,;b[$ $(a < b)$ tel que $f'(x_0) = 0$ et c'est impossible car , pour tout réel x , $f'(x) \neq 0$.
Par conséquent , pour tous réels a et b , $f'(a)f'(b) > 0$.

c) $f'(0) = 1$, alors $f'(x)f'(0) = f'(x)$; par suite , pour tout réel x , $f'(x) > 0$.

d) En dérivant les deux membres de la relation (1), on trouve : $f'(x) \times f''(x) - f(x) \times f'(x) = 0$ avec
$f'(x) \neq 0$, alors pour tout réel x , $f''(x) - f(x) = 0$; donc $f''(x) = f(x)$.

3- La fonction sinus hyperbolique notée « $\sinh$ » est définie sur R par $\sinh(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.

Les fonctions $x\to e^{x}$ et $x\to e^{-x}$ sont dérivables sur IR, alors la fonction « $\sinh$ » est dérivable sur IR.

$(\sinh)'(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, alors $(\sinh)'(0)=\dfrac{e^{0}+e^{0}}{2}=1$.

$((\sinh)'(x))^{2}=\dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$ et $((\sinh)(x))^{2}=\dfrac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}$; par suite

$((\sinh)'(x))^{2}-((\sinh)(x))^{2}=1$

4- a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$;

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

$f'(x)>0$.

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Figure 25

b) f est continue et strictement croissante et $f(IR)=IR$, alors pour tout réel λ, l'équation $f(x)=\lambda$

admet une solution unique.

L'équation $f(x)=\lambda$ est équivalente à $e^{x}-e^{-x}=2\lambda$ donc à $e^{2x}-2\lambda e^{x}-1=0$ avec $e^{x}>0$.

L'équation du second degré $t^{2}-2\lambda t-1=0$ de discriminant $\Delta'=\lambda^{2}+1>0$ possède une seule racine

positive $t=\lambda+\sqrt{\lambda^{2}+1}$, alors $e^{x}=\lambda+\sqrt{\lambda^{2}+1}$; donc $x=\ln(\lambda+\sqrt{\lambda^{2}+1})$.

c) La solution de l'équation $f(x)=2$ est $\ln(2+\sqrt{5})\approx 1.4$ et celle de $f(x)=6$ est $\ln(6+\sqrt{37})\approx 2.5$.

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{e^{x}}{x}-\dfrac{e^{-x}}{x}\right)=+\infty$, alors (C) admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une direction asymptotique

parallèle à l'axe des ordonnées.

Tracer (C) en utilisant $f(1.4)\approx 2$ et $f(2.5)\approx 6$.

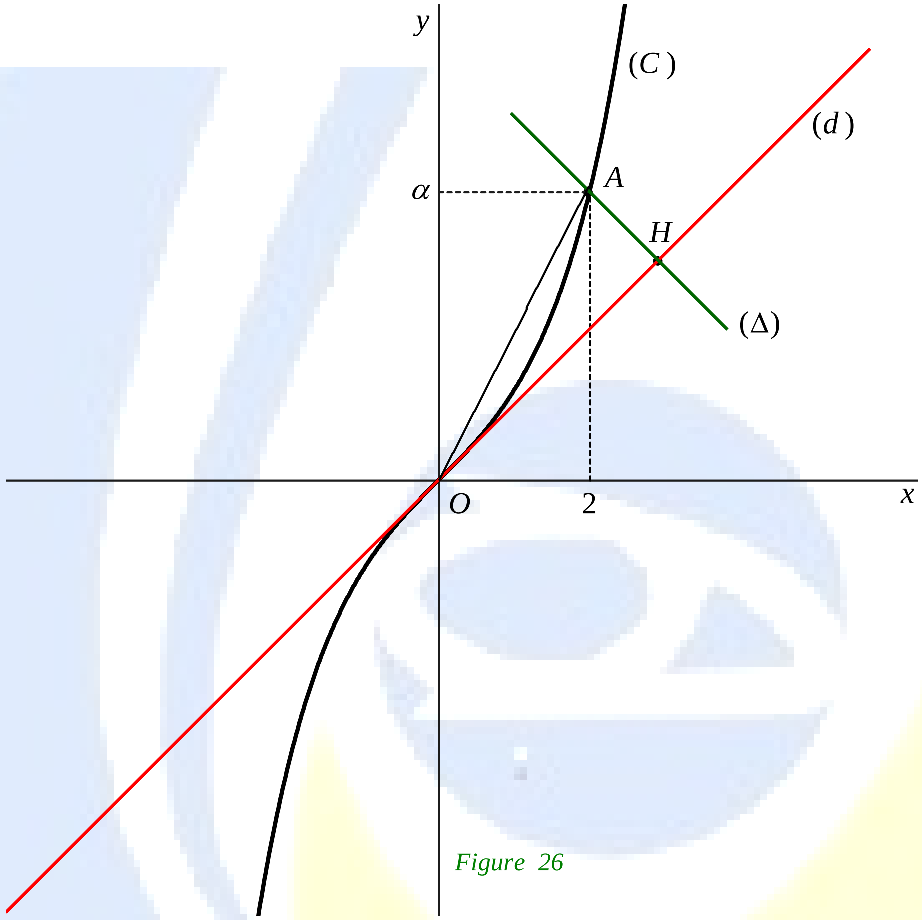


Figure 26

5- $A(2\,;\alpha)$ appartient à (C) ; (Δ) est la droite de coefficient directeur -1 passant par A .

a) Une equation de la droite (Δ) est $y=-x+\alpha+2$.

H est le point d'intersection de (d) et (Δ); alors $H(\frac{\alpha+2}{2}\,;\frac{\alpha+2}{2})$.

b) Le triangle OAH est rectangle en H et son aire est $S=\frac{1}{2}OH\times AH\ \ cm^2$ où :

$OH=\frac{\alpha+2}{\sqrt{2}}$ et $AH=\frac{\alpha-2}{\sqrt{2}}$, $(\alpha\approx 3.6>2)$; alors $S=\frac{\alpha^2-4}{4}\ \ cm^2$.

c) L'aire du domaine limité par (C), (d) et (Δ) est égale à $S-S'\ cm^2$ où S' est l'aire du domaine limité par (C) et la droite (OA), situé au dessus de l'axe des abscisses .

$A(2\,;\,\alpha)$, alors une équation de la droite (OA) est $y=\frac{\alpha}{2}x$.

$$S'=\int_0^2\left(\frac{\alpha}{2}x-f(x)\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{2}x^2-e^x-e^{-x}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(2\alpha-e^2-e^{-2}\right)-\frac{1}{2}(-1-1)\ ;$$

$$S'=\frac{1}{2}\left(2\alpha-e^2-e^{-2}+2\right)\ cm^2.$$

Par suite , l'aire demandée est $A=\frac{e^2+e^{-2}}{2}+\frac{\alpha^2-4\alpha-8}{4}\ cm^2$.