Université Libanaise
Faculté de Génie

Concours d'entrée (SUJET A)
MATHÉMATIQUES
(Programme Libanais)

Date: *16/07/2022*
Durée: *3h*

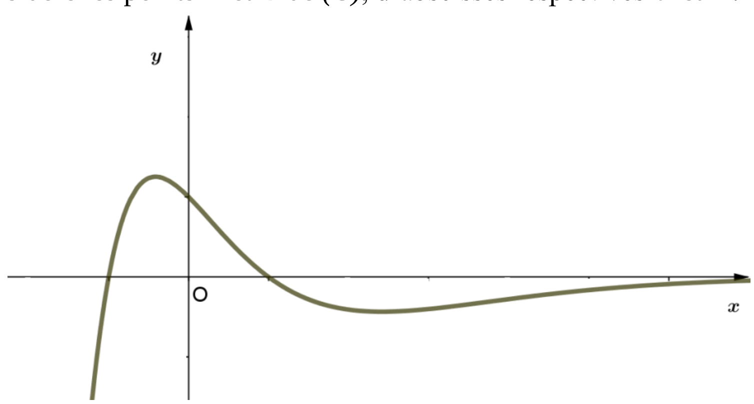
Les smartphones et les documents sont strictement interdits.
Les calculatrices non graphiques sont autorisées.

Exercice 1: (14 points)
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, ***une seule*** *des quatre réponses proposées est exacte.Une réponse exacte rapporte ½ point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*
Répondre sur la feuille de réponses, en entourant pour chaque question ***une seule*** *des réponses* ***a***, ***b***, ***c*** *ou* ***d***.
Aucune justification n'est demandée.

1. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + \frac{5}{2} = z$ sont données par :

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ et $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$
b) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ et $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$
c) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ et $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$
d) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ et $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

2. Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée (*C*) de la fonction *f* définie par $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$. On considère les points A et B de *(C)*, d'abscisses respectives 0 et 1.



a) Les tangentes à *(C)* en A et B sont parallèles.
b) La fonction f admet un minimum global (absolu).
c) L'équation $f(x) = 1/4$ admet deux solutions réelles.
d) La courbe *(C)* admet un point d'inflexion unique.

3. Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne. On considère alors les évènements suivants :

• V_1 : « la première boule tirée est verte » ;
• V_2 : « la seconde boule tirée est verte » ;
• B_1 : « la première boule tirée est blanche » ;
• B_2 : « la seconde boule tirée est blanche ».

a) La probabilité de l'évènement V_2 est égale à $\frac{25}{64}$.
b) La probabilité de l'évènement V_2 est égale à $\frac{5}{8}$.
c) La probabilité de l'évènement V_2 est égale à $\frac{15}{56}$.
d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

4. Considérons l'équation $\ln(3x+1) + \ln(2x+1) - \ln(x^2) = 0$ où l'inconnue x est une variable réelle. L'ensemble des solutions de cette équation est :

a) $\mathcal{S} =]-\frac{1}{3}\ ;+\infty[$.
b) $\mathcal{S} =]-\frac{1}{3}\ ;+\infty[-\{0\}$.
c) $\mathcal{S} = \{\frac{-5-\sqrt{5}}{10};\frac{-5+\sqrt{5}}{10}\}$.
d) Aucune des trois réponses précédentes n'est correcte.

5. Au lycée National, un quart des élèves habitent Hadath. On choisit au hasard 2 élèves du lycée et on suppose que l'effectif du lycée est suffisamment important pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise. La probabilité que sur les 2 élèves choisis, aucun n'habite Hadath, est égale à :

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{3}{16}$ **c)** $\frac{9}{16}$ **d)** Aucune des trois réponses précédentes n'est correcte.

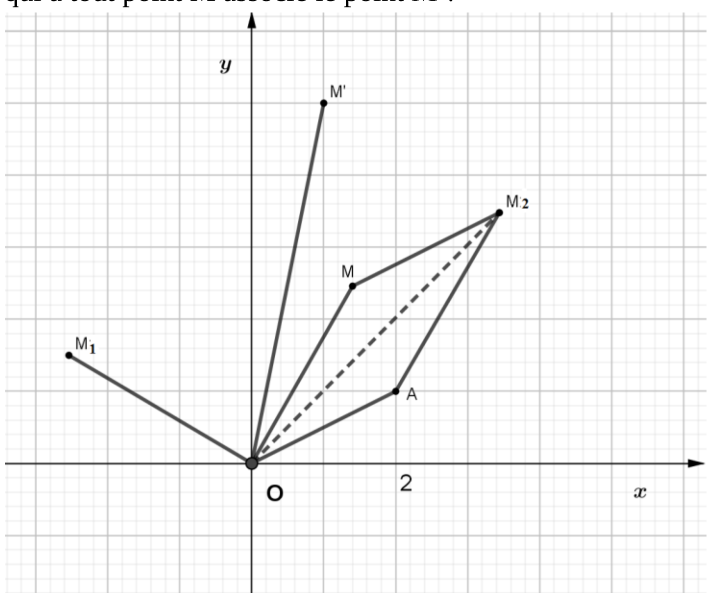
6. Une entreprise fabrique des cartes à puces. Chaque puce peut présenter deux défauts notés A et B. Une étude statistique montre que 2,8% des puces ont le défaut A, 2,2% des puces ont le défaut B et, heureusement, 95,4% des puces n'ont aucun des deux défauts.
La probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait les deux défauts est:

a) 0,046 **b)** 0,004 **c)** 0,904 **d)** Aucune des trois réponses précédentes n'est correcte.

7. On a constaté que, sur 4 ans, le prix d'une certaine denrée a augmenté de 8% par an.
On peut affirmer que, sur les 4 ans, le prix de cette denrée a augmenté, à l'unité près, de :

a) 12 % **b)** 32 % **c)** 36 % **d)** Aucune des trois réponses précédentes n'est correcte.

8. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .On considère le point A de coordonnées (2 ; 1).
A tout point M, on associe le point M_1 tel que le triangle MOM_1 est rectangle isocèle en O avec $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}\right) = \frac{\pi}{2}$, et le point M_2 tel que OAM_2M est un parallélogramme. On note M' le point tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.
Soit T la similitude directe qui à tout point M associe le point M'.



a) T est la transformation d'écriture complexe $z' = (1 + i)z + 2$.
b) T est la transformation d'écriture complexe $z' = (1 + i)z + 2 + i$.
c) T est la transformation d'écriture complexe $z' = iz + 2$.
d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

9. Le réel $A = e^{\frac{5}{3}} + 3e^3 e^{-\frac{4}{3}}$ est égal à :

a) $e^{\frac{5}{3}} + 3e^{-4}$ **b)** $4 + e^{\frac{5}{3}}$ **c)** $\frac{1}{8}\left(2e^{\frac{1}{3}}\right)^5$ **d)** $-e^{\frac{3}{5}} + \frac{e^9}{e^{\frac{4}{3}}}$

10. Considérons la fonction f définie par $f(x) = \ln\left((6x - 12)\, e^{\frac{x}{2}} + 2 - x\right)$. On note D_f l'ensemble de définition de f.

a) $D_f =]-2\ln(6)\,; +\infty[$. **b)** $D_f =]-\infty; -2\ln(6)[\cup]2; +\infty[$.
c) $D_f =]2; +\infty[$. **d)** Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

11. On dispose de deux dés tétraédriques non truqués. Les faces de chaque dé sont numérotées de 1 à 4.
On lance les deux dés. On note alors X la variable aléatoire définie comme suit:

- Si les deux nombres obtenus avec les dés sont différents, alors X est égale au plus grand d'entre eux;
- Si les deux nombres obtenus sont égaux, alors X est égale à l'un d'eux.

L'espérance E(**X**) de la variable aléatoire **X** vaut :

a) 4 **b)** $\frac{25}{8}$ **c)** 8 **d)** Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et H d'affixes respectives : $-5+6i$, $3-2i$ et -5. Soit s la similitude directe de centre A qui transforme B en H.

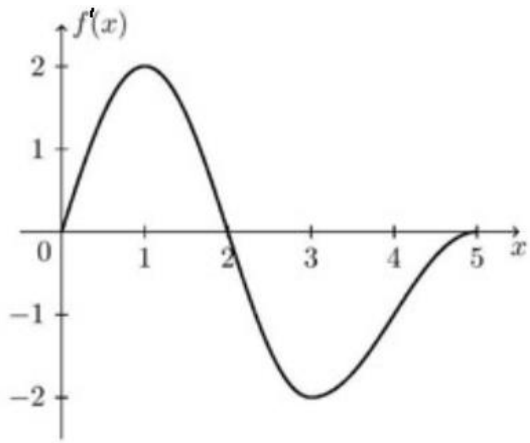
a) s est une homothétie de rapport ¾ .

b) s est une similitude de rapport $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ et d'angle $-\pi/4$.

c) s est une similitude de rapport $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ et d'angle $-\pi/2$.

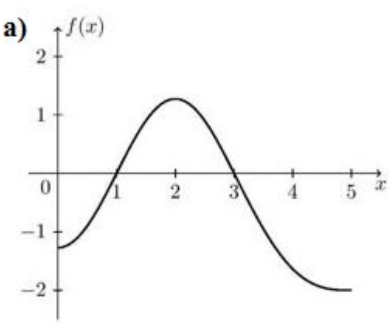
d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

13. Considérons une fonction rélle f définie et dérivable sur $[0;5]$ dont la courbe de la dérivée f' est représentée ci-dessous.

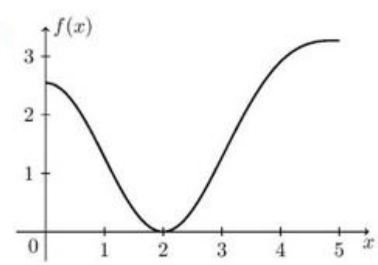


Lequel des graphiques ci-dessous représente-t-il la courbe de f?

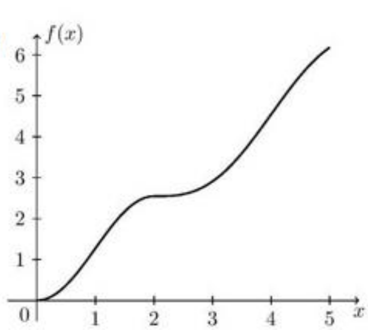
a)



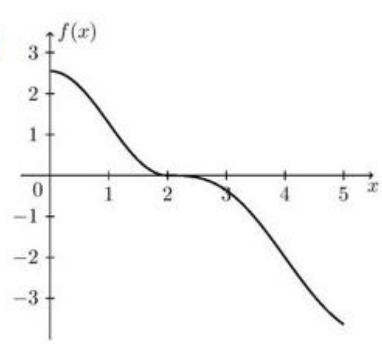
b)



c)

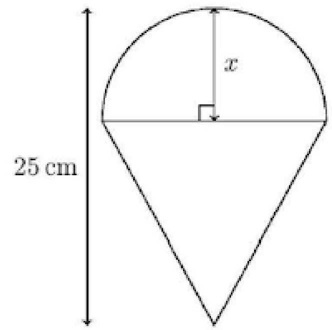


d)



14. Je veux vendre des glaces. Pour cela, j'imprime des affiches avec un grand cornet de glace. Le cornet est un triangle équilatéral et la boule de glace est représentée par un demi-cercle de rayon x. Pour avoir un bel effet, j'exige que la hauteur totale du cornet et de la boule de glace soit de 25 cm (cf. illustration ci-dessous).
Quelle est alors la valeur de x?

a) $\frac{25}{2}$ **b)** $\frac{25}{1+\sqrt{2}}$ **c)** $\frac{25}{1+\sqrt{3}}$ **d)** $\frac{25(3-\sqrt{3})}{2}$



15. $\lim\limits_{x\to 0^-} xe^{-\frac{1}{x}} =$

a) 0 **b)** $-\infty$ **c)** $+\infty$ **d)** 1

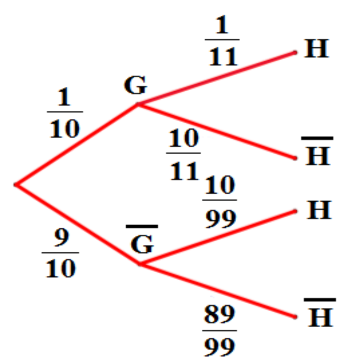
16. On donne l'arbre de probabilités ci-contre.
On peut alors affirmer que :

a) $p(\overline{\mathbf{H}}/\mathbf{G}) = \frac{1}{11}$

b) $p(\mathbf{H}) = \frac{19}{99}$

c) $p(\mathbf{G}/\mathbf{H}) = \frac{1}{11}$

d) $p(\mathbf{G} \cap \overline{\mathbf{H}}) = \frac{10}{11}$



17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x}{e^x+1}$, de courbe représentative (C) dans un repère. La tangente à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation:

a) $y = 2x + 2$ **b)** $x = \frac{1}{2}y$ **c)** $x = 0$ **d)** $y = 2$

18. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'ensemble Ω des points M d'affixe z tels que $|\bar{z} - 1 + i| = |3 - 4i|$.

a) Ω est une droite.
b) Ω est un cercle.
c) $\Omega = \{A, B\}$ où A et B sont les points d'affixes respectives $4 + 5i$ et $-2 - 3i$.
d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

19. Dans le plan complexe, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c.

Si $\dfrac{a-b}{c-b} = -i$, alors le triangle ABC est :

a) isocèle et non rectangle. **b)** équilatéral. **c)** isocèle rectangle. **d)** rectangle et non isocèle.

20. Le double du logarithme d'un nombre est égal au logarithme de la moitié de ce nombre. Quel est ce nombre ?

a) -1 **b)** 0 **c)** $0{,}5$ **d)** 2

21. Considérons la fonction rélle suivante $f: x \longmapsto \sqrt{\frac{3x}{4x-5}}$.

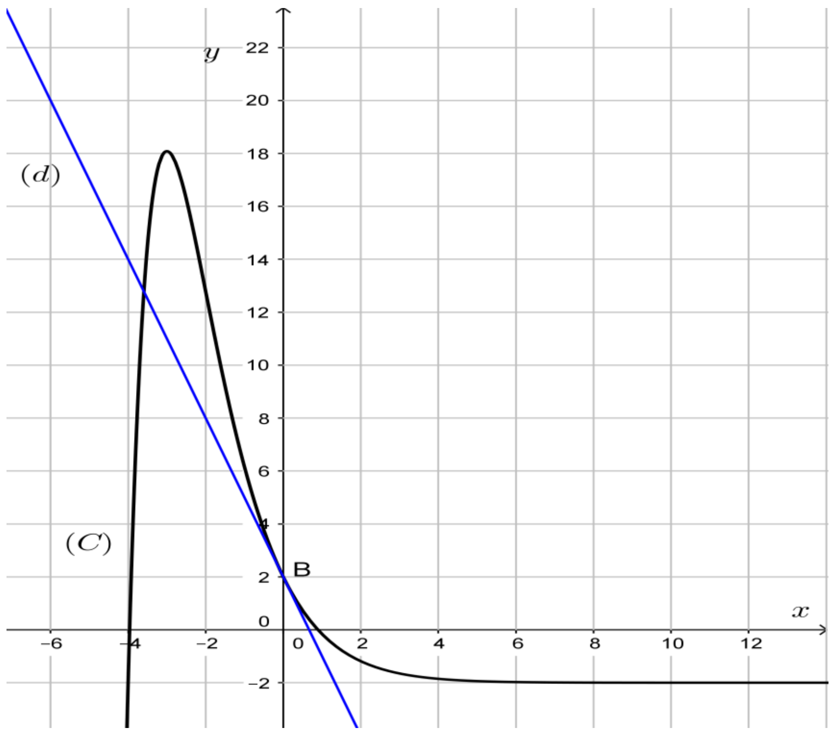
a) f est définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{5}{4}\}$.

b) f est dérivable sur $]-\infty; 0] \cup]\frac{5}{4}; +\infty[$.

c) f est continue sur $]-\infty; 0] \cup [\frac{5}{4}; +\infty[$.

d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

22. La courbe *(C)* ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction réelle *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Le point B (0 ; 2) appartient à la courbe *(C)*. On a aussi représenté sur ce graphique la droite *(d)* tangente à la courbe *(C)* au point B. La droite *(d)* passe par le point de coordonnées (-2; 8).
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = a + (x + b)e^{-x}$ où a et b sont deux constantes réelles.



Alors, d'après toutes ces informations, on peut affirmer que:

a) $a = -2$ et $b = -4$.

b) $a = -2$ et $b = 4$.

c) $a = 2$ et $b = 4$.

d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

23. Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$ admet

a) une solution unique. **b)** une infinité de solutions. **c)** deux solutions. **d)** aucune solution.

24. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{(x-1)\ln(5)} - e^{(x-3)\ln(5)}$.

a) f converge vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

b) f diverge vers $+\infty$, lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 25$.

d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

25. Soit (C) la courbe de la fonction $f: x \longmapsto x - \sqrt{x^2 - x}$.

a) La courbe (C) admet la droite d'équation $y = 2x$ comme asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

b) La courbe (C) admet la droite d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ comme asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

c) La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

26. Un code inconnu est constitué de 8 signes. Chaque signe peut être une lettre ou un chiffre. Il y a donc 36 signes utilisables pour chacune des positions. Un logiciel de cassage de code peut tester environ cent millions de codes par seconde.

a) Le temps au maximum au bout duquel le logiciel peut découvrir le code est de 3 heures.

b) Le temps au maximum au bout duquel le logiciel peut découvrir le code est de 8 heures.

c) Le temps au maximum au bout duquel le logiciel peut découvrir le code est de 3,4 heures.

d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

27. On considère la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$.

Quelle est la proposition correcte concernant la fonction f évaluée au point 1?

a) La fonction f admet un maximum lorsque $x = 1$.

b) La fonction f admet un minimum lorsque $x = 1$.

c) La courbe de f présente un point d'inflexion en $x = 1$.

d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

28. Pour la fête du village de Boisjoli, le maire a invité les enfants des villages voisins. Les services de la mairie ayant géré les inscriptions dénombrent 400 enfants à cette fête; ils indiquent aussi que 32% des enfants présents sont des enfants qui habitent le village de Boisjoli.

Lors de cette fête, huit enfants sont choisis au hasard afin de former une équipe qui participera à un défi sportif. On admet que le nombre d'enfants est suffisamment grand pour que cette situation puisse être assimilée à un tirage au hasard avec remise. On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre d'enfants de l'équipe habitant le village de Boisjoli.

La probabilité (*à* 0,001 *près*) que dans l'équipe il y ait au moins un enfant habitant le village de Boisjoli est:

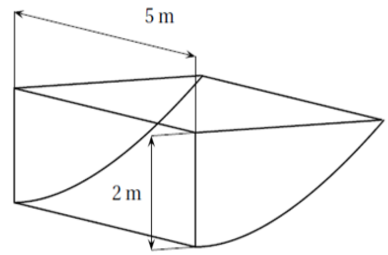
a) 0,125 **b)** 0,875 **c)** 0,954 **d)** 1

***Exercice 2*:** (6 points)

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau. Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant:

- elle doit être située à deux mètres de sa maison;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

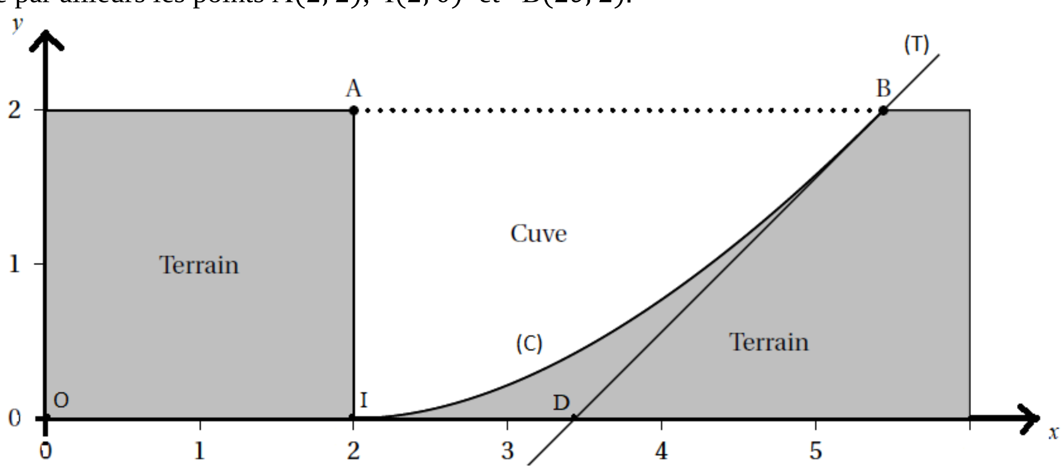
Cette cuve est schématisée ci-contre.



La partie incurvée est modélisée par la courbe (C) de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;2e]$ définie par :

$$f(x)=x\ln\left(\frac{x}{2}\right)-x+2.$$

La courbe (C) est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve. On considère par ailleurs les points $\mathrm{A}(2;2)$, $\mathrm{I}(2;0)$ et $\mathrm{B}(2e;2)$.



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe (C) et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe (C) au point I.

2. Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[2;2e]$.

3. Montrer que $4{,}311 < x_0 < 4{,}312$. En déduire une valeur approchée de x_0 à 10^{-3} près.

4. Etudier la convexité de la fonction f.

5. On note (T) la tangente à la courbe (C) au point B et D le point d'intersection de la droite (T) avec l'axe des abscisses.

a) Déterminer une équation de la droite (T) et en déduire les coordonnées de D.

b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe (C), les droites d'équations $y=2$ et $x=2$.
On note V le volume total de la cuve. Ainsi on sait que $V=5S$.
En remarquant que S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB, en déduire alors que $10e-10 \leq V \leq 20e-30$.

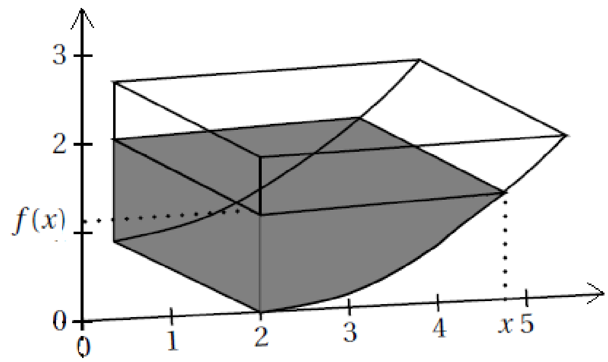
6. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[2;2e]$ par : $F(x)=\dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{3x^2}{4}+2x$.

a) Montrer que la fonction F est une primitive de f sur $[2;2e]$, c'est-à-dire que $F'=f$.

b) Soit S' l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=2e$.
On montre en analyse que $S'=F(2e)-F(2)$.
Déterminer alors la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve en m^3, arrondie à l'entier le plus proche.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et $2e$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.



On montre que, pour tout réel x de l'intervalle $[2; 2e]$, on a: $v(x)=5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)-2x\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{4}+2x-3\right]$.

1. Quel volume d'eau, arrondi à l'entier le plus proche, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de 1 mètre?

2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

a) Montrer que la fonction v est strictement croissante sur $[2; 2e]$.

b) Montrer qu'il existe une unique valeur c dans l'intervalle $[2; 2e]$ telle que $v(c)=\frac{V}{2}$.

c) Que représente alors la valeur $f(c)$?

Lebanese University
Faculty of Engineering

-CORRECTION-
Entrance Exam
MATHEMATICS
TEST A
(Lebanese program)

Date: *16/07/2022*
Duration: *3h*

Exercise 1:

Question	Answer
1	c
2	c
3	b
4	d
5	c
6	b
7	c
8	b
9	c
10	b
11	b
12	b
13	a
14	c
15	b
16	c
17	b
18	b
19	c
20	c
21	d
22	b
23	d
24	b
25	b
26	b
27	c
28	c

Exercise 2:

Part A:

1. ■ . $f(x_B) = f(2e) = 2e\ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = 2 = y_B$ thus $B \in (C)$.

. $f(x_I) = f(2) = 2\ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 0 = y_I$ thus $I \in (C)$.

■ $\forall x \in [2; 2e]$, $f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x\left(\frac{1/2}{x/2}\right) - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ $\Rightarrow f'(2) = \ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0$.

Therefore the tangent to (C) at I is horizontal, meaning that the abscissa axis is to tangent to (C) at I.

2. $\forall x \in]2; 2e]$, on a: $x > 2 \Rightarrow \frac{x}{2} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$; and $f'(2) = 0$.

Hence f is strictly increasing on $[2; 2e]$.

Moreover, f is continuous on $[2; 2e]$, and, $\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(2e) = 2 \end{cases}$.

Since $1 \in [0; 2]$, then, according to intermediate value theorem, the equation $f(x) = 1$ admits one unique solution $x_0 \in [2; 2e]$.

3. $f(4{,}311) = 0{,}99994 \ldots < 1$ and $f(4{,}312) = 1{,}000714 \ldots > 1$ $\Rightarrow \boxed{4{,}311 < x_0 < 4{,}312}$

Hence we can take $\boxed{x_0 \cong 4{,}311}$ as an approximated value of x_0 with 3 decimal places.

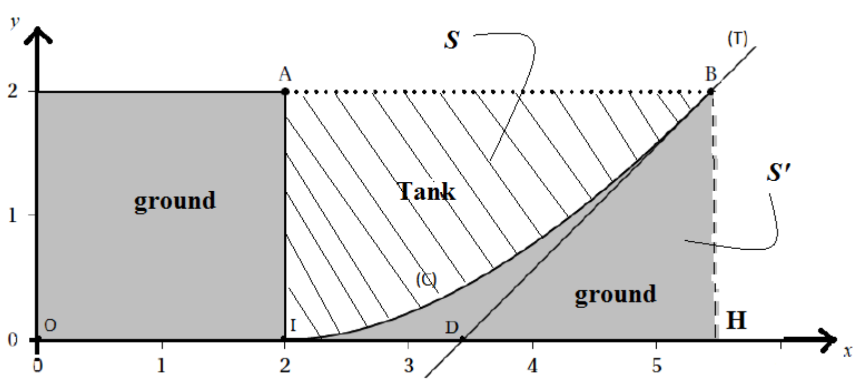
4. $\forall x \in [2; 2e]$, $f''(x) = \frac{1/2}{x/2} = \frac{1}{x} > 0$ therefore f is convex on $[2; 2e]$.

5. **a)** ■ (T): $y = f'(2e)(x - 2e) + f(2e)$

$\begin{cases} f(2e) = 2 \\ f'(2e) = \ln(e) = 1 \end{cases} \Rightarrow (T)$: $y = x - 2e + 2$

■ For $y = 0$ we have: $x = 2e - 2$. Thus $\boxed{D(2e - 2; 0)}$.

b)



· Area of triangle ABI: $\mathcal{A}_{\text{ABI}} = \frac{\text{AI}\times\text{AB}}{2} = \frac{2\times(2e-2)}{2} = 2e - 2$ m²

· Area of trapezoid AIDB: $\mathcal{A}_{\text{AIDB}} = \frac{\text{AI}\times(\text{AB}+\text{ID})}{2} = \frac{2\times(2e-2+2e-4)}{2} = 4e - 6$ m²

· Since $\mathcal{A}_{\text{ABI}} \le S \le \mathcal{A}_{\text{AIDB}}$ then $2e - 2 \le S \le 4e - 6$ $\Rightarrow 5(2e - 2) \le 5S \le 5(4e - 6)$.

So $\boxed{10e - 10 \le V \le 20e - 30}$. *qed*

6. a) $\forall x \in [2;2e]$, $F'(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1/2}{x/2} - \frac{3x}{2} + 2$

$= x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \frac{3x}{2} + 2$

$= x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$

$= f(x)$

Hence F is a primitive (antiderivative) of f over $[2;2e]$.

b) · $S' = F(2e) - F(2) = \left(2e^2\ln(e) - \frac{3}{4}(4e^2) + 4e\right) - \left(2\ln(1) - \frac{3}{4}(4) + 4\right)$

$= 2e^2 - 3e^2 + 4e + 3 - 4$

$\boxed{= -e^2 + 4e - 1}$

· Let H be the orthogonal projection of B on (Ox).

We have $S + S' =$ area of rectangle AIHB $=$ AI $\times$ AB $= 2(2e-2) = 4e - 4$.

Hence $S = 4e - 4 - S'$

$= 4e - 4 - (-e^2 + 4e - 1)$

$= e^2 - 3 \ m^2$

We deduce that $V = 5(e^2 - 3) = \boxed{5e^2 - 15}$; hence we can assert thats $\boxed{V \cong 22 \ m^3}$

Part B:

1. According to part A, we know that $f(x) = 1 \iff x = x_0 \cong 4{,}311$.

For $x = x_0$, the volume of the tank equals: $v(x_0) = v(4{,}311) \cong \boxed{7 \ m^3}$

2. a) $\forall x \in [2;2e]$, $v'(x) = 5\left[x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} - 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} + 2\right]$

$= 5(x-2)\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

On the other hand, $2 < x \leq 2e \implies x - 2 > 0 \implies \frac{x}{2} > 1 \implies \ln\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \implies v'(x) > 0$; and $v'(2) = 0$.

Therefore the function v is strictly increasing on $[2;2e]$.

b) Over $[2;2e]$, v is continuous and strictly increasing. Moreover $\begin{cases} v(2) = -1 + 4 - 3 = 0 \\ v(2e) = 5(e^2 - 3) = V \end{cases}$.

Since $\frac{V}{2} \in [0;V]$, then the equation $v(x) = \frac{V}{2}$ admits one unique solution $c \in [2;2e]$.

c) $f(c)$ represents the height of water corresponding to the half filling of the tank.

Concours d'entrée
MATHÉMATIQUES
(Programme Français)

Date: *16/07/2022*
Durée: *3h*

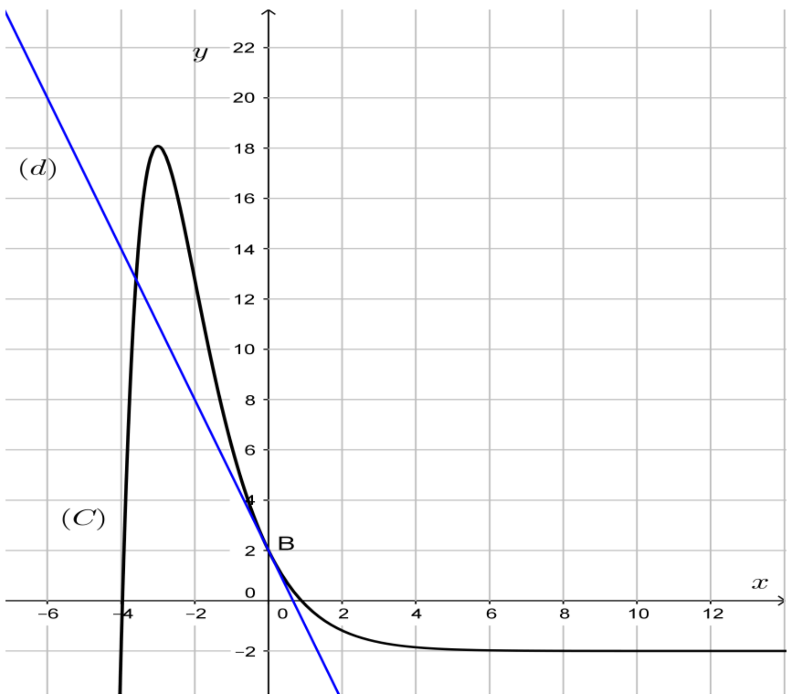
Les smartphones et les documents sont strictement interdits.
Les calculatrices graphiques ne sont pas autorisées.

Exercice 1: (14 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, ***une seule*** *des quatre réponses proposées est exacte.Une réponse exacte rapporte ½ point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*
Répondre sur la feuille de réponses, en entourant pour chacune des questions ***une seule*** *des réponses a, b, c ou d.*
Aucune justification n'est demandée.

1. On a constaté que, sur 10 ans, le prix d'une certaine denrée a augmenté de 8% par an.
On peut affirmer que, sur 10 ans, le prix de cette denrée a augmenté, à l'unité près, de :
a) 18 % **b)** 80 % **c)** 116 % **d)** Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

2. La courbe *(C)* ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction *f* définie et dérivable sur ℝ.
Le point B (0 ; 2) appartient à la courbe *(C)*. On a aussi représenté sur ce graphique la droite *(d)* tangente à la courbe *(C)* au point B. La droite *(d)* passe par le point de coordonnées (-2; 8).
La fonction f est définie sur ℝ par: $f(x) = a + (x + b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels.



Alors, d'après toutes ces informations, on peut affirmer que:
a) $a = -2$ et $b = -4$. **b)** $a = -2$ et $b = 4$.
c) $a = 2$ et $b = 4$. **d)** Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

3. Considérons l'équation (E) suivante : $(6x - 12)\, e^{\frac{x}{2}} + 2 - x = 0$.
a) (E) admet une seule solution réelle. **b)** (E) admet deux solutions réelles.
c) (E) admet une infinité de solutions réelles. **d)** Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	$\boldsymbol{n}$ un nombre entier
Initialisation :	Affecter à $\boldsymbol{n}$ la valeur 0
Traitement :	Tant que $1{,}9^{\boldsymbol{n}} < 100$ Affecter à $\boldsymbol{n}$ la valeur $\boldsymbol{n}$+1 Fin Tant_que
Sortie :	Afficher $\boldsymbol{n}$

a) La valeur affichée en sortie de cet algorithme est 7,2.
b) La valeur affichée en sortie de cet algorithme est 7.
c) La valeur affichée en sortie de cet algorithme est 8.
d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

5. Une étude sur le nombre de chenilles dans une petite forêt libanaise a dénombré 9700 chenilles le 1er Juin 2018. L'étude a montré que, le n-ième jour après le 1er juin 2018, on peut modéliser le nombre de chenilles (en centaines) par la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{1}{3}(-2809 \times 0{,}91^n + 3100)$. Selon ce modèle:

a) le nombre de chenilles diminue de jour en jour.
b) le nombre de chenilles augmente mais ne dépassera jamais 100000.
c) le nombre de chenilles augmente et dépassera 100000 le 7 juillet 2018.
d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

6. Une entreprise fabrique des cartes à puces. Chaque puce peut présenter deux défauts notés A et B. Une étude statistique montre que 2,8% des puces ont le défaut A, 2,2% des puces ont le défaut B et, heureusement, 95,4% des puces n'ont aucun des deux défauts.
La probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait les deux défauts est:
a) 0,046 **b)** 0,004 **c)** 0,904 **d)** Aucune des trois réponses précédentes n'est correcte.

7. L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère alors le point A de coordonnées $(-1, -1, 1)$, et les droites (D) et (D') de représentations paramétriques:

$$(D)\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = t \end{cases} \quad \text{et} \quad (D')\begin{cases} x = 3t' \\ y = t' + 2 \\ z = 3t' - 2 \end{cases} \quad \text{où } t, t' \in \mathbb{R}.$$

a) Le point A appartient à la droite (D).
b) Le plan perpendiculaire à la droite (D) et passant par le point O a pour équation cartésienne $2x - 3y + z = 0$.
c) Les droites (D) et (D') sont orthogonales.
d) Les droites (D) et (D') sont coplanaires.

8. Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne. On considère alors les évènements suivants :

- V_1 : « la première boule tirée est verte » ;
- V_2 : « la seconde boule tirée est verte » ;
- B_1 : « la première boule tirée est blanche » ;
- B_2 : « la seconde boule tirée est blanche ».

a) La probabilité de l'évènement V_2 est égale à $\frac{25}{64}$.
b) La probabilité de l'évènement V_2 est égale à $\frac{5}{8}$.
c) La probabilité de l'évènement V_2 est égale à $\frac{15}{56}$.
d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

9. Considérons l'équation $\ln(3x+1)+\ln(2x+1)-\ln(x^2)=0$ où l'inconnue x est une variable réelle.
L'ensemble des solutions de cette équation est :

a) $\mathcal{S} =]-\frac{1}{3}\ ; +\infty[$.

b) $\mathcal{S} =]-\frac{1}{3}\ ; +\infty[-\{0\}$.

c) $\mathcal{S} = \{\frac{-5-\sqrt{5}}{10} ; \frac{-5+\sqrt{5}}{10}\}$.

d) Aucune des trois réponses précédentes n'est correcte.

10. Au lycée français, un quart des élèves habitent Achrafieh. On choisit au hasard 5 élèves du lycée et on suppose que l'effectif du lycée est suffisamment important pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise.
La probabilité que sur les 5 élèves choisis, il y ait seulement 2 élèves qui habitent Achrafieh, est égale à :

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{135}{512}$ **c)** $\frac{9}{16}$ **d)** Aucune des trois réponses précédentes n'est correcte.

11. Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 9e$ et $U_{n+1} = 3(\sqrt{U_n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pose $V_n = \ln\left(\frac{U_n}{9}\right)$ pour tout entier naturel n.

a) La suite (V_n) est une suite géométrique.

b) La suite (V_n) est une suite arithmétique.

c) La suite (U_n) est une suite géométrique.

d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

12. On dispose de deux dés tétraédriques non truqués. Les faces de chaque dé sont numérotées de 1 à 4.
On lance les deux dés. On note alors **X** la variable aléatoire définie comme suit:

- Si les deux nombres obtenus avec les dés sont différents, alors **X** est égale au plus grand d'entre eux;
- Si les deux nombres obtenus sont égaux, alors **X** est égale à l'un d'eux.

L'espérance E(**X**) de la variable aléatoire **X** vaut :

a) 4 **b)** $\frac{25}{8}$ **c)** 8 **d)** Aucune des trois réponses précédentes n'est correcte.

13. La norme d'un vecteur $\vec{v}$ est notée $\|\vec{v}\|$ et le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 12$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 8$.
Que vaut $\|\vec{u}+\vec{v}\|$?

a) 13 **b)** 15 **c)** 23 **d)** 169

14. $\lim_{x \to 0^-} xe^{-\frac{1}{x}} =$

a) 0 **b)** $-\infty$ **c)** $+\infty$ **d)** 1

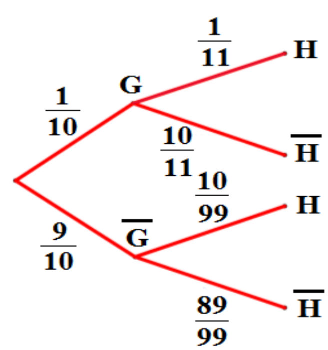
15. On donne l'arbre de probabilités ci-contre. On peut alors affirmer que :

a) $p_{\mathbf{G}}(\overline{\mathbf{H}}) = \frac{1}{11}$

b) $p(\mathbf{H}) = \frac{19}{99}$

c) $p_{\mathbf{H}}(\mathbf{G}) = \frac{1}{11}$

d) $p(\mathbf{G} \cap \overline{\mathbf{H}}) = \frac{10}{11}$



16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x}{e^x+1}$, de courbe représentative (C) dans un repère. La tangente à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation:

a) $y = 2x+2$ **b)** $x = \frac{1}{2}y$ **c)** $x = 0$ **d)** $y = 2$

17. La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5^{n-1} - 5^{n-3}$

a) converge vers 0. **b)** diverge vers $+\infty$. **c)** converge vers 25. **d)** est minorée par 5.

18. Soit (C) la courbe de la fonction $f : x \longmapsto x - \sqrt{x^2 - x}$.

a) La courbe (C) admet la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

b) La courbe (C) admet la droite d'équation $y = 2x$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

c) La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

19. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0{,}3 \times u_n$, pour tout entier naturel n. On considère alors l'algorithme ci-contre.

Variables :	***n*** un nombre entier naturel ***U*** un nombre réel
Initialisation :	Affecter à ***n*** la valeur 0 Affecter à ***U*** la valeur 2
Traitement :	Tant que ***n***$\leqslant$ 10 Affecter à ***n*** la valeur ***n***+1 Affecter à ***U*** la valeur 0,3×***U*** Afficher ***U*** Fin Tant que

a) Cet algorithme affiche le 11[ième] terme de la suite (u_n).

b) Cet algorithme affiche les termes de la suite (u_n), inférieurs ou égaux à 10.

c) Cet algorithme affiche les termes $u_1, u_2, \dots, u_{11}$ de la suite (u_n).

d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

20. Considérons la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{\frac{3x}{4x-5}}$.

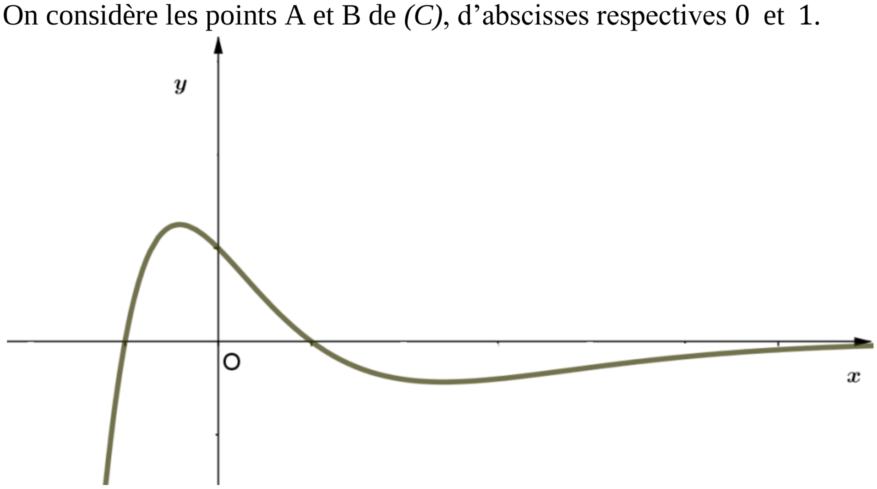
a) f est définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{5}{4}\}$

b) f est dérivable sur $]-\infty; 0] \cup]\frac{5}{4}; +\infty[$

c) f est continue sur $]-\infty; 0] \cup [\frac{5}{4}; +\infty[$

d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

21. Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée *(C)* de la fonction *f* définie par $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$. On considère les points A et B de *(C)*, d'abscisses respectives 0 et 1.



a) Les tangentes à *(C)* en A et B sont parallèles.

b) La fonction f admet un minimum global.

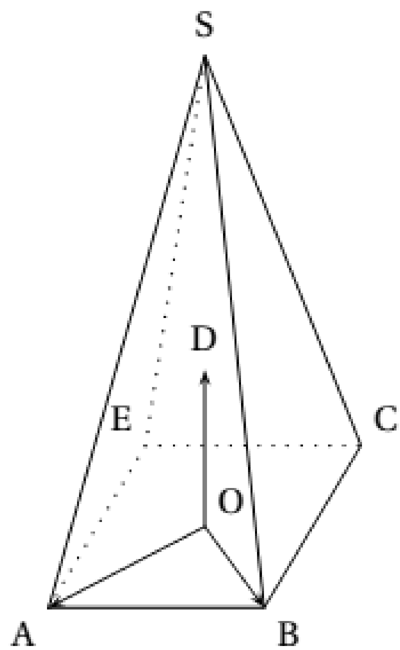
c) L'équation $f(x) = 1/4$ admet deux solutions réelles.

d) La courbe *(C)* admet un point d'inflexion unique.

22. Un code inconnu est constitué de 8 signes. Chaque signe peut être une lettre ou un chiffre. Il y a donc 36 signes utilisables pour chacune des positions. Un logiciel de cassage de code peut tester environ cent millions de codes par seconde.

a) Le temps au maximum au bout duquel le logiciel peut découvrir le code est de 3 h.
b) Le temps au maximum au bout duquel le logiciel peut découvrir le code est de 8 h.
c) Le temps au maximum au bout duquel le logiciel peut découvrir le code est de 3,4 h.
d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

23. Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées (0; 0; 3) dans ce repère.
Soit U le point de la droite (SB) de cote 1 (distance du point U au plan OAB).



a) Le point U a pour coordonnées $(0; 1; 1)$.
b) Le point U a pour coordonnées $\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$.
c) Le vecteur $\vec{n}(3; -3; 5)$ est situé dans le plan (EAU).
d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

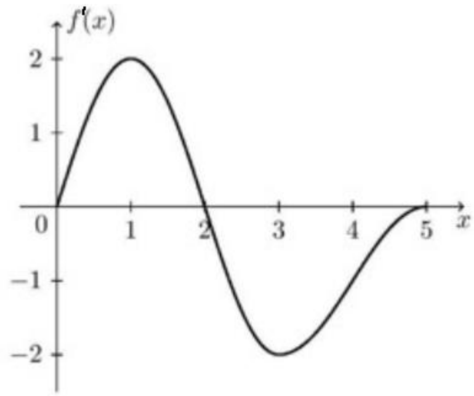
24. Pour la fête du village de Boisjoli, le maire a invité les enfants des villages voisins. Les services de la mairie ayant géré les inscriptions dénombrent 400 enfants à cette fête; ils indiquent aussi que 32% des enfants présents sont des enfants qui habitent le village de Boisjoli.
Lors de cette fête, huit enfants sont choisis au hasard afin de former une équipe qui participera à un défi sportif. On admet que le nombre d'enfants est suffisamment grand pour que cette situation puisse être assimilée à un tirage au hasard avec remise. On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre d'enfants de l'équipe habitant le village de Boisjoli.
La probabilité (*à* 0,001 *près*) que dans l'équipe il y ait au moins un enfant habitant le village de Boisjoli est:

a) 0,125 **b)** 0,875 **c)** 0,954 **d)** Aucun des trois résultats précédents n'est correct.

25. Le double du logarithme d'un nombre est égal au logarithme de la moitié de ce nombre.
Quel est ce nombre ?

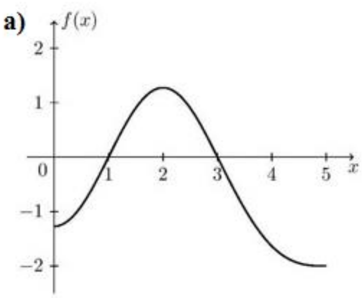
a) -1 **b)** 0 **c)** 0,5 **d)** 2

26. Considérons une fonction rélle f définie et dérivable sur $[0; 5]$ dont la courbe de la dérivée f' est représentée ci-dessous.

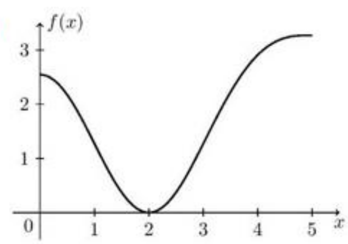


Lequel des graphiques ci-dessous représente-t-il la courbe de f?

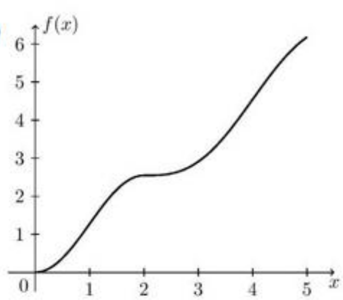
a)



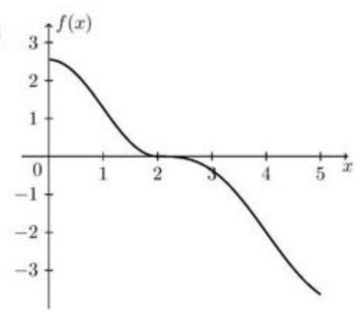
b)



c)



d)



27. On considère la fonction f définie explicitement par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$.

Quelle est la proposition correcte concernant la fonction f évaluée au point 1?

a) La fonction f admet un maximum lorsque $x = 1$.

b) La fonction f admet un minimum lorsque $x = 1$.

c) La courbe de f présente un point d'inflexion en $x = 1$.

d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

28. Je veux vendre des glaces. Pour cela, j'imprime des affiches avec un grand cornet de glace. Le cornet est un triangle équilatéral et la boule de glace est représentée par un demi-cercle de rayon x. Pour avoir un bel effet, j'exige que la hauteur totale du cornet et de la boule de glace soit de 25 cm (cf. illustration ci-contre).

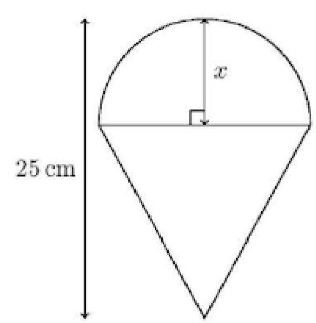
Quelle est alors la valeur de x?

a) $\frac{25}{2}$

b) $\frac{25}{1+\sqrt{2}}$

c) $\frac{25}{1+\sqrt{3}}$

d) $\frac{25(3-\sqrt{3})}{2}$

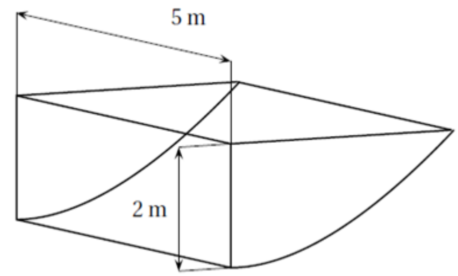


Exercice 2: (6 points)

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau. Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant:

- elle doit être située à deux mètres de sa maison;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

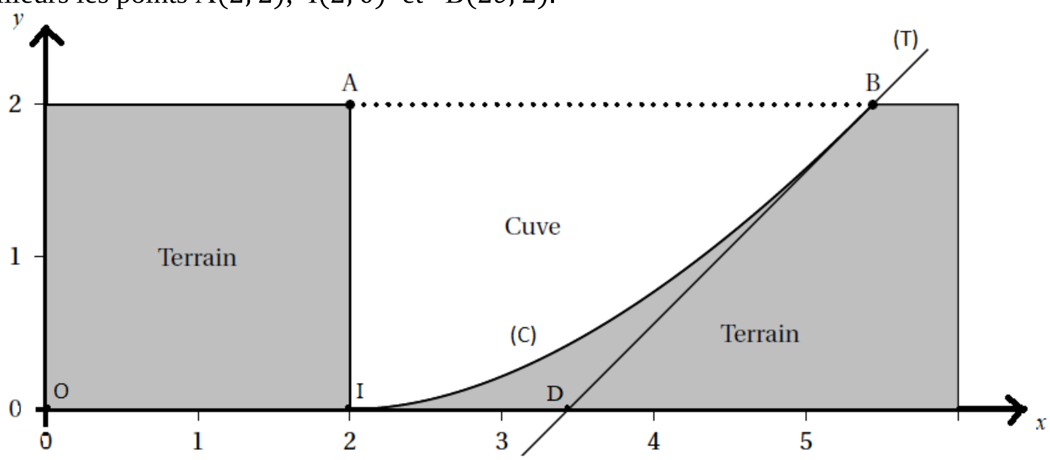
Cette cuve est schématisée ci-contre.



La partie incurvée est modélisée par la courbe (C) de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;2e]$ définie par :

$$f(x)=x\ln\left(\frac{x}{2}\right)-x+2.$$

La courbe (C) est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve. On considère par ailleurs les points $A(2;2)$, $I(2;0)$ et $B(2e;2)$.



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe (C) et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe (C) au point I.

2. Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[2;2e]$.

3. Montrer que $4{,}311 < x_0 < 4{,}312$. En déduire une valeur approchée de x_0 à 10^{-3} près.

4. Etudier la convexité de la fonction f.

5. On note (T) la tangente à la courbe (C) au point B et D le point d'intersection de la droite (T) avec l'axe des abscisses.

a) Déterminer une équation de la droite (T) et en déduire les coordonnées de D.

b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe (C), les droites d'équations $y=2$ et $x=2$.
On note V le volume total de la cuve.
En remarquant que S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB, en déduire alors que $10e-10 \leq V \leq 20e-30$.

6. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[2;2e]$ par $g(x)=x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

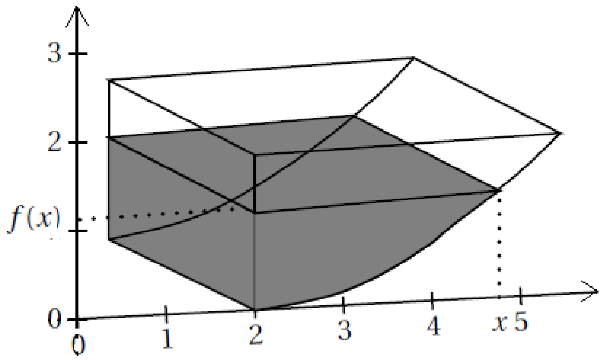
a) Montrer que la fonction G définie par $G(x)=\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{4}$ est une primitive de g sur $[2;2e]$.

b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2;2e]$.

c) Soit S' l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=2e$.
On montre en analyse que $S'=F(2e)-F(2)$.
Déterminer alors la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et $2e$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.



On montre que, pour tout réel x de l'intervalle $[2; 2e]$, on a: $v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right]$.

1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de 1 mètre?

2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère alors l'algorithme ci- dessous.

Variables :	Les nombres a, b et c sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 2 Affecter à b la valeur $2e$
Traitement :	Tant que $v(b) - v(a) > 10^{-3}$ faire : c prend la valeur $(a+b)/2$ Si $v(c) < V/2$ alors a prend la valeur c sinon b prend la valeur c fin Si fin Tant que
Sortie :	Afficher $f(c)$

Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

Université Libanaise
Faculté de Génie

-CORRECTION-

Concours d'entrée

MATHÉMATIQUES

(Programme français)

Date: *16/07/2022*
Durée: *3h*

Exercice 1:

Question	Réponse
1	c
2	b
3	b
4	c
5	c
6	b
7	b
8	b
9	d
10	b
11	a
12	b
13	a
14	b
15	c
16	b
17	b
18	d
19	c
20	d
21	c
22	b
23	b
24	c
25	c
26	a
27	c
28	c

Exercice 2:

Partie A:

1. ■ . $f(x_B) = f(2e) = 2e\ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = 2 = y_B$ donc $B \in (C)$.

. $f(x_I) = f(2) = 2\ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 0 = y_I$ donc $I \in (C)$.

■ $\forall x \in [2; 2e]$, $f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x\left(\frac{1/2}{x/2}\right) - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ $\Longrightarrow f'(2) = \ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0$.

Donc la tangente à (C) en I est horizontale, d'où l'axe des abscisses est tangent à (C) en I.

2. $\forall x \in]2; 2e]$, on a: $x > 2 \Longrightarrow \frac{x}{2} > 1 \Longrightarrow \ln\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \Longrightarrow f'(x) > 0$. De plus $f'(2) = 0$.

Donc f est strictement croissante sur $[2; 2e]$.

Par ailleurs, f est continue sur $[2; 2e]$, et de plus, $\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(2e) = 2 \end{cases}$.

Or $1 \in [0; 2]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $x_0 \in [2; 2e]$.

3. $f(4{,}311) = 0{,}99994 \ldots < 1$ et $f(4{,}312) = 1{,}000714 \ldots > 1$ $\Longrightarrow \boxed{4{,}311 < x_0 < 4{,}312}$

On peut donc prendre $\boxed{x_0 \cong 4{,}311}$ comme valeur approchée à 10^{-3} près.

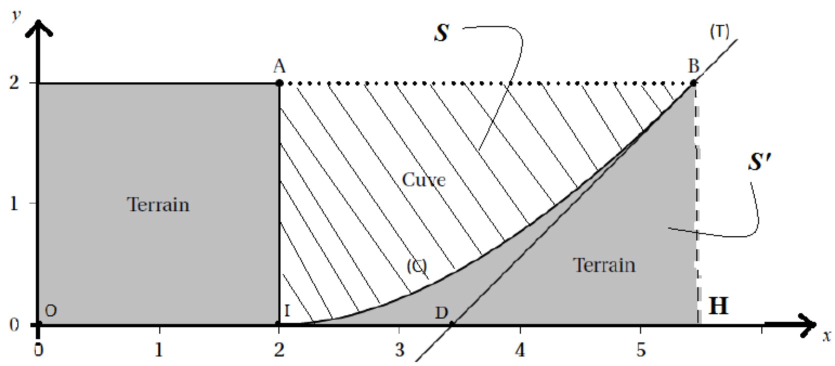
4. $\forall x \in [2; 2e]$, $f''(x) = \frac{1/2}{x/2} = \frac{1}{x} > 0$ donc f est convexe sur $[2; 2e]$.

5. **a)** ■ (T): $y = f'(2e)(x - 2e) + f(2e)$

$\begin{cases} f(2e) = 2 \\ f'(2e) = \ln(e) = 1 \end{cases} \Longrightarrow (T)$: $y = x - 2e + 2$

■ Pour $y = 0$ on a: $x = 2e - 2$. Donc $\boxed{D(2e - 2; 0)}$.

b)



· Aire du triangle ABI: $\mathcal{A}_{\text{ABI}} = \frac{\text{AI}\times\text{AB}}{2} = \frac{2\times(2e-2)}{2} = 2e - 2$ m²

· Aire du trapèze AIDB: $\mathcal{A}_{\text{AIDB}} = \frac{\text{AI}\times(\text{AB}+\text{ID})}{2} = \frac{2\times(2e-2+2e-4)}{2} = 4e - 6$ m²

· On a $\mathcal{A}_{\text{ABI}} \leq S \leq \mathcal{A}_{\text{AIDB}}$ $\Longrightarrow$ $2e - 2 \leq S \leq 4e - 6$ $\Longrightarrow$ $5(2e - 2) \leq 5S \leq 5(4e - 6)$.

Donc $\boxed{10e - 10 \leq V \leq 20e - 30}$. *cqfd*

6. **a)** $\forall x \in [2; 2e]$, $G'(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1/2}{x/2} - \frac{x}{2} = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) = g(x)$.

Donc G est bien une primitive de g sur $[2; 2e]$.

b) $\forall x \in [2; 2e]$, on a: $f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2 = g(x) - x + 2$.

Donc une primitive de f sur $[2; 2e]$ est donnée par:

$F(x) = G(x) - \frac{x^2}{2} + 2x = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} + 2x$.

c) · $S' = F(2e) - F(2) = \left(2e^2\ln(e) - \frac{3}{4}(4e^2) + 4e\right) - \left(2\ln(1) - \frac{3}{4}(4) + 4\right)$

$= 2e^2 - 3e^2 + 4e + 3 - 4$

$= -e^2 + 4e - 1$

· Soit H le projeté orthogonal de B sur (Ox).

On a: $S + S' =$ aire du rectangle AIHB = AI × AB $= 2(2e - 2) = 4e - 4$.

D'où $S = 4e - 4 - S'$

$= 4e - 4 - (-e^2 + 4e - 1)$

$= \boxed{e^2 - 3\ m^2}$

On en déduit que $V = 5(e^2 - 3) = \boxed{5e^2 - 15}$; donc on peut affirmer que $\boxed{V \cong 22\ m^3}$

Partie B:

1. D'après la partie A, on sait que $f(x) = 1 \iff x = x_0 \cong 4{,}311$.

Pour $x = x_0$, le volume de la cuve vaut: $v(x_0) = v(4{,}311) \cong \boxed{7\ m^3}$

2. En utilisant la méthode la dichotomie, cet algorithme permet de déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près, de la solution c de l'équation $v(x) = \frac{V}{2}$. La valeur affichée sera alors l'image de c par f.

Ainsi, cet algoritme permet de calculer et d'afficher la hauteur d'eau correspondant, à 10^{-3} près, à un remplissage à moitié de la capacité totale de la cuve.