UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2013 - 2014 ***Mathématiques*** ***Durée : 3 heures***

La distribution des notes est sur 25 ***13 juillet 2013***

I- (2.5 pts) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

On considère dans le plan (P) d'équation $2x+y-2z+3=0$, le cercle (C) de centre $A(1\,;-3\,;1)$ et de rayon $\sqrt{3}$; et dans le plan (Q) d'équation $x-y-z-3=0$, le cercle (γ) de centre $B(2\,;-1\,;0)$ et de rayon 3.

1- Ecrire un système d'équations paramétriques de chacun des deux axes (d) de (C) et (δ) de (γ) .

2- Déterminer le point d'intersection I de (d) et (δ) .

3- Montrer que I est le centre d'une sphère (S) contenant les cercles (C) et (γ). Calculer le volume de (S) .

II- (3.5 pts) On considère l'équation (E) : $(\cos^2\alpha)z^2+(\sin 2\alpha)z+1+\sin^2\alpha=0$ où $0\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Soit M' et M'' les images , dans le plan complexe , des solutions z' et z'' de (E) .

1- Calculer z' et z'' en fonction de α et montrer que , quand α varie , $z'^2+z''^2$ reste constant .

2- Calculer $M'M''$ en fonction de α et déterminer α tel que $M'M''$ soit minimum .

3- Montrer que , quand α varie , M' et M'' varient sur une hyperbole (H) de centre O, pour laquelle on détermine les asymptotes , un foyer et la directrice associée . Tracer (H).

III- (3.5 pts) On considère les suites (U_n) , (V_n) et (W_n) définies pour tout entier naturel $n\ge1$ par

$$U_n=\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\cdots\cdots+\frac{n^3}{n^4}\ ;\quad V_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2}\ \text{ et }\ W_n=\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\cdots\cdots+\sin\frac{n}{n^2}.$$

1- Montrer que (U_n) est majorée par 1 et que (V_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

2- a) En utilisant l'inégalité (1) : $x-\dfrac{x^3}{6}\le\sin x\le x$ qui est vraie pour tout x dans $[0\,;+\infty[$, montrer que :

Pour tout $n\ge1$ et pour tout entier naturel k , $\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{1}{6n^2}\times\dfrac{k^3}{n^4}\le\sin\dfrac{k}{n^2}\le\dfrac{k}{n^2}$.

b) Montrer que , pour tout $n\ge1$, $V_n-\dfrac{1}{6n^2}\times U_n\le W_n\le V_n$. En déduire que $V_n-\dfrac{1}{6n^2}\le W_n\le V_n$.

c) Montrer que (W_n) est convergente et déterminer sa limite .

IV- (3.5 pts) On considère une urne contenant 10 boules dont n sont vertes , m sont rouges et les autres sont blanches telles que $n\ge2$; $m\ge2$ et $n+m\le8$.

Un joueur paye 5 \$ et tire deux boules au hasard de cette urne .

Soit X la variable aléatoire qui est égale au gain algébrique du joueur après le jeu .

Le joueur gagne $15\,\$$ pour chaque boule verte tirée , $5\,\$$ pour chaque boule rouge tirée et perd $5\,\$$ pour chaque boule blanche tirée .

1- a) Déterminer les valeurs de X .
b) Calculer $p(X=25)$ et $p(X=15)$ en fonction de n et m .
c) Sachant que $p(X=25)=\dfrac{1}{15}$ et $p(X=15)=\dfrac{2}{15}$, déterminer n et m .
2- On suppose dans cette partie que l'urne contient 3 boules vertes , 2 boules rouges et 5 boules blanches .
a) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique .
b) Calculer la probabilité que le joueur ait tiré 2 boules de même couleur sachant que son gain algébrique est positif .

V- (5 pts) On donne dans un plan orienté , un cercle (C) de centre A et de rayon 3 et un cercle (C') de centre B et de rayon 1, tels que $AB=6$.

1- Soit S la similitude d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ qui transforme (C) en (C').
a) Déterminer le rapport de S et justifier que son centre I est tel que $IA=3IB$.
b) Montrer que $IA=\dfrac{18}{\sqrt{7}}$ et $IB=\dfrac{6}{\sqrt{7}}$. Construire I .

2- Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{2}{3}$.
a) Construire les points D et E tels que $D=r(B)$ et $E=h(B)$.
b) Calculer $\dfrac{BE}{AD}$ et $(\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{BE})$. En déduire $S(D)$.
c) Montrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ADE .

Dans ce qui suit , on rapporte le plan au repère orthonormé direct $(A\ ;\ \overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v})$ ***tel que*** $\overrightarrow{u}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ **.**

3- Déterminer la relation complexe de la similitude S . En déduire l'affixe de I .
4- a) Déterminer la relation complexe de chacune de la rotation r et de l'homothétie h .
b) Déterminer l'affixe de chacun des points D et E et vérifier que $S(D)=E$.

VI- (7 pts) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=\ell n^2 x-\ell n x$.
Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j})$.
1- Déterminer les points d'intersection A et B , ($x_A<x_B$) , de (C) avec l'axe des abscisses .
2- a) Dresser le tableau de variations de f et déterminer le point S correspondant au minimum de f .
b) Montrer que la restriction de f sur l'intervalle $]0\ ;1]$ admet une fonction réciproque f^{-1} que l'on déterminera .
suite géométrique croissante dont la raison est à déterminer .

3- a) Etudier la concavité de (C) et déterminer son point d'inflexion I .
b) Vérifier que les abscisses des points A , B , S et I sont , dans un certain ordre , 4 termes consécutifs d'une

4- Tracer (C) . (***Unité graphique : 2 cm***)

5- a) Déterminer , en fonction de α , une équation de la tangente (d) à (C) au point M d'abscisse α .
b) Déterminer l'ordonnée β du point d'intersection de (d) avec l'axe des ordonnées .
c) Montrer que , quand α décrit $]0\,;+\infty[$, β admet un minimum β_0 . Déterminer β_0 et la position correspondante de M .

6- a) Montrer que, pour tout $m > \beta_0$, il existe deux points M_1 et M_2 sur (C) où la tangente à (C) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée m .
b) Montrer que les abscisses α_1 et α_2 de M_1 et M_2 sont telles que $\alpha_1\alpha_2 = e^3$.
c) Déterminer le point E de (C) tel que les tangentes à (C) aux points E et B se coupent sur l'axe des ordonnées .

7- On considère la suite (I_n) définie sur $I\!N$ par $I_n = \int_1^e (\ell n\, x)^n\, dx$.
a) A l'aide d'une intégration par parties , montrer que , pour tout $n \geq 1$, $I_n = e - nI_{n-1}$.
b) Calculer l'aire du domaine limité par (C) et l'axe des abscisses en cm^2 .

UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسية

Concours d'entrée 2013 - 2014 — ***Solution de Mathématiques*** — ***Durée : 3 heures***

La distribution des notes est sur 25 — ***13 juillet 2013***

EXERCICE 1

1- L'axe (d) de (C) est perpendiculaire à (P) de A ; $\overrightarrow{u}(2\,;1\,;-2)$ est un vecteur directeur de (d).

Un système d'équations paramétriques de (d) est $(x=2t+1\ ;\ y=t-3\ ;\ z=-2t+1\ ;\ t\in IR)$

L'axe (δ) de (γ) est perpendiculaire à (Q) de B ; $\overrightarrow{v}(1\,;-1\,;-1)$ est un vecteur directeur de (δ).

Un système d'équations paramétriques de (δ) est $(x=m+2\ ;\ y=-m-1\ ;\ z=-m\ ;\ m\in IR)$.

2- Le système $(2t+1=m+2\ ;\ t-3=-m-1\ ;\ -2t+1=-m)$ a une solution unique $m=t=1$.

donc, (d) et (δ) se coupent au point $I(3\,;-2\,;-1)$.

3- I appartient à (d) alors I est équidistant de tous les points de (C) ; pour tout point M de (C), le triangle IAM est droite à A tel que $IA=\sqrt{4+1+4}=3$ et $AM=r=\sqrt{3}$ alors $IM=\sqrt{IA^2+AM^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

I appartient à (δ) alors I est équidistant de tous les points de (γ) ; pour tout point M de (γ) , le triangle IBM est droite à B tel que $IB=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$ et $BM=r'=3$ alors $IM=\sqrt{IB^2+BM^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

Donc I est équidistant de tous les points de $(C)\cup(\gamma)$. Par conséquent, I est le centre d'une sphère (S) de rayon $R=2\sqrt{3}$ contenant le cercles (C) et (γ) .

EXERCICE 2

1- (E) : $(\cos^2\alpha)z^2+2(\sin\alpha\cos\alpha)z+1+\sin^2\alpha=0$; pour tous $[0\,;\frac{\pi}{2}[$, l'équation (E) est quadratique.

$\Delta'=\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=-\cos^2\alpha=i^2\cos^2\alpha$.

Les solutions de (E) sont $z'=\dfrac{-\sin\alpha\cos\alpha+i\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=-\tan\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}i$ et $z''=-\tan\alpha-\dfrac{1}{\cos\alpha}i$.

$$z'^2+z''^2=\left(-\tan\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}i\right)^2+\left(-\tan\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}i\right)^2=2\left(\tan^2\alpha-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)=2(-1)=-2.$$

OU $z'^2+z''^2=(z'+z'')^2-2z'z''=(-2\tan\alpha)^2-2\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\tan^2\alpha\right)=-2(1)=-2$.

2- $M'M''=|z'-z''|=\left|\dfrac{2}{\cos\alpha}i\right|=\left|\dfrac{2}{\cos\alpha}\right|=\dfrac{2}{\cos\alpha}$ puisque $0\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ alors $\cos\alpha>0$.

$M'M''$ minimum est équivalent à $\cos\alpha$ est maximum ou $0<\cos\alpha\le1$; donc $M'M''$ est minimum quand $\cos\alpha=1$; c'est quand $\alpha=0$

3- $M'(-\tan\alpha\ ;\ \frac{1}{\cos\alpha})$ et $M''(-\tan\alpha\ ;\ \frac{-1}{\cos\alpha})$ sont les images de z' et z''.

Les coordonnées x et y de chacun de M' et M'' sont tels que $x^2 - y^2 = \tan^2\alpha - \frac{1}{\cos^2\alpha} = -1$.

donc , comme α varie , M' et M'' varie sur l'hyperbole (H) d'équation $y^2 - x^2 = 1$.

Le centre de (H) est l'origine O , les asymptotes sont les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.

L'axe central de (H) est l'axe des ordonnées.

$a = b = 1$ alors $c = \sqrt{2}$; Donc $F(0\ \sqrt{2})$ est un axe de (H) et le droite (d) d'équation $y = \frac{a^2}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est la directrice associée.

Dessinez (H) .

EXERCICE 3

1- $U_n = \frac{1}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \frac{3^3}{n^4} + \cdots\cdots + \frac{n^3}{n^4}$ alors $U_n \le \underbrace{\frac{n^3}{n^4} + \frac{n^3}{n^4} + \frac{n^3}{n^4} + \cdots\cdots + \frac{n^3}{n^4}}_{n\ times} = n\left(\frac{n^3}{n^4}\right) = 1$

$V_n = \frac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$ et (V_n) converge de $\frac{1}{2}$.

2- La séquence (W_n) est définie pour $n \ge 1$ par $W_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \sin\frac{3}{n^2} + \cdots\cdots + \sin\frac{n}{n^2}$.

a) En appliquant (1) à $\frac{1}{n^2}$ nous obtenons $\frac{1}{n^2} - \frac{1^3}{6n^6} \le \sin\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$; à savoir $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{6n^2} \times \frac{1^3}{n^4} \le \sin\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$.

b) En appliquant (1) à $\frac{k}{n^2}$ pour $k \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3 \cdots\cdots ;\ n\}$ et en ajoutant les n inégalités nous obtenons

$V_n - \frac{1}{6n^2} \times U_n \le W_n \le V_n$.

Pour tous $n \ge 1$, $U_n \le 1$ alors $V_n - \frac{1}{6n^2} \le W_n \le V_n$.

c) (V_n) converge à $\frac{1}{2}$ et $\ell im_{n\to+\infty} \frac{1}{6n^2} = 0$ alors (W_n) est convergente et sa limite est égale à $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 4

1- La variable aléatoire X représente le gain algébrique total du joueur après le match.

a) ▪ Si le joueur tire 2 boules vertes alors, $X = 15+15-5 = 25$.

▪ Si le joueur tire une boule verte et une rouge alors, $X = 15+5-5 = 15$.

▪ Si le joueur tire une boule verte et un blanc alors, $X = 15-5-5 = 5$.

▪ Si le joueur tire 2 boules rouges alors , $X = 5+5-5 = 5$.

▪ Si le joueur tire une boule rouge et un blanc alors, $X = 5-5-5 = -5$.

▪ Si le joueur tire 2 boules blanc alors $X = -5-5-5 = -15$.

Par conséquent, l'ensemble des valeurs de X est $\{-15\,;\,-5\,;\,5\,;\,15\,;\,25\}$.

b) Lorsque 2 boules sont tirées au hasard dans l'urne qui contient les 10 boules, l'espace de l'échantillon est équiprobable et consiste de ${}_{10}C_2$ de résultats possible.

▪ $(X = 25)$ représente l'événement " le joueur tire deux boules vertes " ; donc

$$p(X = 25) = \frac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2} = \frac{n(n-1)}{90} .$$

▪ $(X = 15)$ représente l'événement " le joueur tire un boules vertes et un rouges " donc

$$p(X = 15) = \frac{n \times m}{{}_{10}C_2} = \frac{n \times m}{45} .$$

c) $p(X = 25) = \dfrac{1}{15}$ est équivalente de $\dfrac{n(n-1)}{90} = \dfrac{1}{15}$; $n(n-1) = 6$ donc $n = 3$.

$p(X = 15) = \dfrac{2}{15}$ est équivalente de $\dfrac{n \times m}{45} = \dfrac{2}{15}$; $mn = 6$ ou $n = 3$; donc $m = 2$.

2- Supposons que dans cette partie que l'urne contient 3 boules vertes, 2 boules rouges et 5 boules blanches.

a) ▪ $(X = -15)$ est le cas " le joueur tire deux boules blanches " ; Donc $p(X = -15) = \dfrac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2} = \dfrac{2}{9}$.

▪ $(X = -5)$ est le cas " le joueur tire 1 boule rouge et 1 blanche " ; $p(X = -5) = \dfrac{2 \times 5}{{}_{10}C_2} = \dfrac{2}{9}$.

▪ $(X = 5)$ est le cas " le joueur tire 1 boule verte et 1 blanche ou 2 boules rouges " ;

$$p(X = 5) = \frac{3 \times 5}{{}_{10}C_2} + \frac{{}_2C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{16}{45} .$$

- $p(\mathrm{X}=15)=\dfrac{2}{15}$ et $p(\mathrm{X}=25)=\dfrac{1}{15}$

  Le gain attendu du joueur est $\overline{X}=-15\times\dfrac{2}{9}-5\times\dfrac{2}{9}+5\times\dfrac{16}{45}+15\times\dfrac{2}{15}+25\times\dfrac{1}{15}=1\,\$$.

b) Soit A : " le joueur tire 2 boules de même couleur " et B : " le gain algébrique est positive " .

La probabilité requise est $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ ou

$A\cap B$: " le joueur tire 2 boules vertes ou 2 boules rouges " ;

$p(A\cap B)=p(X=25)+\dfrac{{}_2C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{45}=\dfrac{4}{45}$ et

$p(B)=p(X=5)+p(X=15)+p(X=25)=\dfrac{25}{45}=\dfrac{5}{9}$.

Donc $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{4}{25}$.

EXERCICE 5

1- S est la similitude de centre I angle $\dfrac{\pi}{3}$ qui transforme (C) en (C').

a) ▪ Le rapport de S est $k=\dfrac{rayon\ de\ (C')}{rayon\ de\ (C)}=\dfrac{1}{3}$.

▪ La similitude transforme le centre A de (C) dans le centre B de (C') ; donc $IB=\dfrac{1}{3}IA$; alors $IA=3IB$.

b) $S(A)=B$; alors $(\overrightarrow{IA}\,;\overrightarrow{IB})=\dfrac{\pi}{3}\ \ (2\pi)$.

- Dans le triangle IAB nous pouvons écrire

  $AB^2=IA^2+IB^2-2\,IA\times IB\times\cos\dfrac{\pi}{3}$; tel que

  $36=9IB^2+IB^2-3IB^2$; $IB^2=\dfrac{36}{7}$.

  Donc $IB=\dfrac{6}{\sqrt{7}}$ et $IA=\dfrac{18}{\sqrt{7}}$.

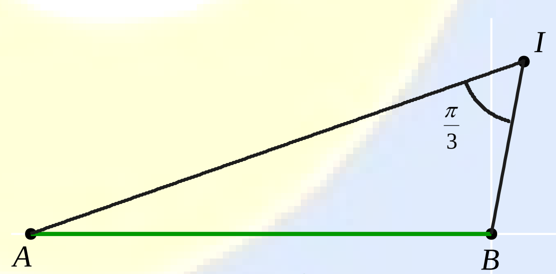
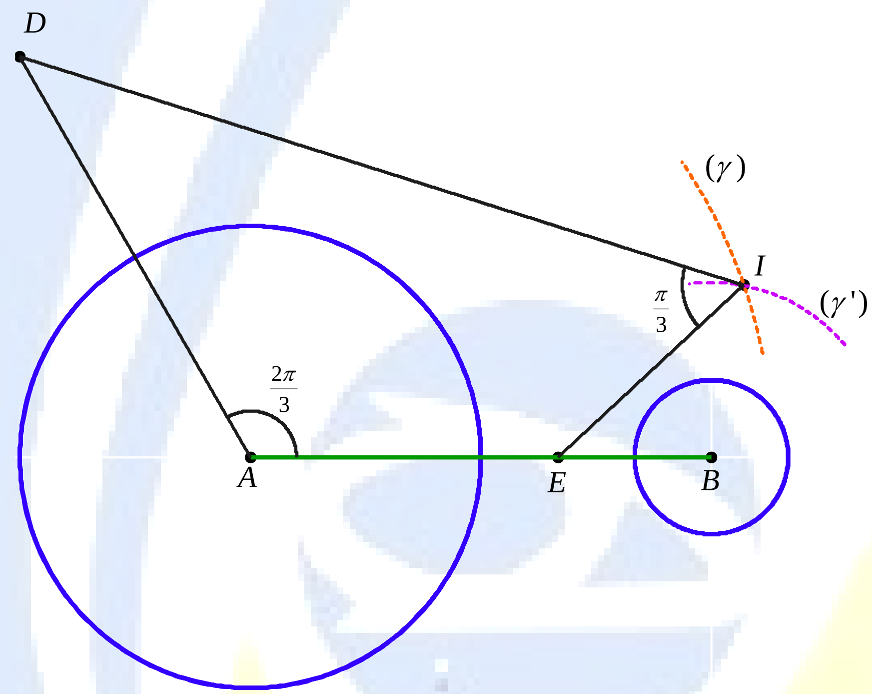


Figure 10

▪ Les points A et B étant donné, le point I appartient au cercle (γ) de centre A et de rayon $\dfrac{18}{\sqrt{7}}$

Et le cercle (γ') de centre B et de rayon $\frac{6}{\sqrt{7}}$.

Les cercles (γ) et (γ') se coupent en deux points; I est le point tel que $(\overrightarrow{IA}\ ;\overrightarrow{IB}) = +\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$.



2- Considère la rotation $r = r(A\,,\frac{2\pi}{3})$ et la dilatation $h = h(A\,,\frac{2}{3})$.

a) ▪ $D = r(B)$; donc D est le point tel que $AD = AB = 6$ et $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AD}) = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.

▪ $E = h(B)$; donc E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; donc E est le point de $[AB]$ telle que $AE = 4$ et $BE = 2$.

b) ▪ $\frac{BE}{AD} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

▪ $(\overrightarrow{AD}\ ;\overrightarrow{BE}) = (\overrightarrow{AD}\ ;\overrightarrow{BA}) = -(\overrightarrow{BA}\ ;\overrightarrow{AD}) = -(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AD}) + \pi = -\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

▪ Les relations ci-dessus avec $S(A) = B$ montre que $S(D) = E$.

c) $S(D)=E$ donne $(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IE})=\frac{\pi}{3}\ \ (2\pi)$.

Le quadrilatère $AEID$ est cyclique pour avoir deux angles complémentaires opposées $E\hat{I}D$ et $E\hat{A}D$; donc I appartient au cercle circonscrit au triangle ADE .

Dans ce qui suit , on rapporte le plan au repère orthonormé direct $(A\ ;\ \overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v})$ ***tel que*** $\overrightarrow{u}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ **.**

3- Dans ce système, nous avons $A(0\ ;\ 0)$, $B(6\ ;\ 0)$

La relation complexe de la similitude $S(I\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{\pi}{3})$ est du forme $z'=az+b$ ou

- $a=\frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$.
- $B=S(A)$; tel que $z_B=az_A+b$; $6=b$.

Donc la relation complexe de S est $z'=(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i)z+6$.

L'affixe du center I de S est $z_I=\frac{b}{1-a}=\frac{6}{\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}i}=\frac{36}{5-\sqrt{3}i}=\frac{36(5-\sqrt{3}i)}{28}=\frac{45}{7}-\frac{9\sqrt{3}}{7}i$.

4- a) la relation complexe du rotation $r(A\ ;\ \frac{2\pi}{3})$ est du forme $z'=az+b$ ou

- $a=e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- $A=r(A)$; tel que $b=0$.

Donc la relation complexe de r est $z'=(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)z$.

la relation complexe de la dilatation $h(A\ ;\ \frac{2}{3})$ est $z'=\frac{2}{3}z$.

b)
- $D=r(B)$; donc $z_D=(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)z_B=6(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-3+3\sqrt{3}i$; $D(-3\ ;\ +3\sqrt{3})$.
- $E=h(B)$; donc $z_E=\frac{2}{3}z_B=4$; $E(4\ ;\ 0)$.
- $(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i)z_D+6=(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i)(-3+3\sqrt{3}i)+6=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{2}+6=4=z_E$; donc $S(D)=E$.

EXERCICE 6

La fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ell n^2 x-\ell n\, x$.

1- Les abscisses des points d'intersection de (C) et l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x)=0$ ce qui est équivalent à $\ell n^2 x-\ell n\, x=0$; $\ell n\, x=0$ ou $\ell n\, x=1$ donc $x=1$ ou $x=e$.
Les points d'intersection de (C) et $x'x$ sont $A(1\,;0)$ et $B(e\,;0)$.

2- a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ell n\, x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ell n^2 x-\ell n\, x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ell n\, x\,(\ell n\, x-1)=+\infty$.

$f'(x)=\dfrac{2\ell n\, x-1}{x}$.

Table de variations de f

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Figure 18

Le point de (C) correspondant au minimum de f est $S(\sqrt{e}\,;-\frac{1}{4})$.

b) la restriction de f sur l'intervalle $]0\,;1]$ est continue et strictement décroissante donc , il a un inverse fonction f^{-1} définie sur $f(]0\,;1])=[0\,;+\infty[$.

Pour tous x dans $[0\,;+\infty[$, $y=f^{-1}(x)$ est équivalente à $x=f(y)=\ell n^2 y-\ell n\, y$;

tel que $\ell n^2 y-\ell n\, y-x=0$ ou $y\in]0\,;1]$ alors $\ell n\, y\in]-\infty\,;0]$; donc $\ell n\, y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{2}$ et

$$y=\exp\left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right).$$

Finalement , f^{-1} est définie sur $[0\,;+\infty[$ by $f^{-1}(x)=\exp\left(\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)$.

3- a) $f''(x)=\dfrac{3-2\ell n\, x}{x^2}$.

Table de concavité de (C)

x	0		$e\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
(C) *concaves*		*upwards*		*downwards*	

Figure 19

La concavité de (C) changes au point $I(e\sqrt{e}\,;\frac{3}{4})$

Lequel est le point d'inflexion de (C).

b) Les abscisses des points A , S , B et I sont respectivement 1 , $\sqrt{e}$, e et $e\sqrt{e}$; Ces nombres sont , dans cet ordre , 4 termes consécutifs d'une suite géométrique croissante de rapport commun $\sqrt{e}$.

4- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ alors , l'axe des ordonnées est asymptote à (C) .

Pour tous n dans IN, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ell n^n x}{x} = 0$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ell n^2 x}{x} - \dfrac{\ell n\, x}{x} \right) = 0$;

Donc (C) a de $+\infty$ une direction asymptotique parallèle à l'axe d'abscisses.

Dessinez (C) .

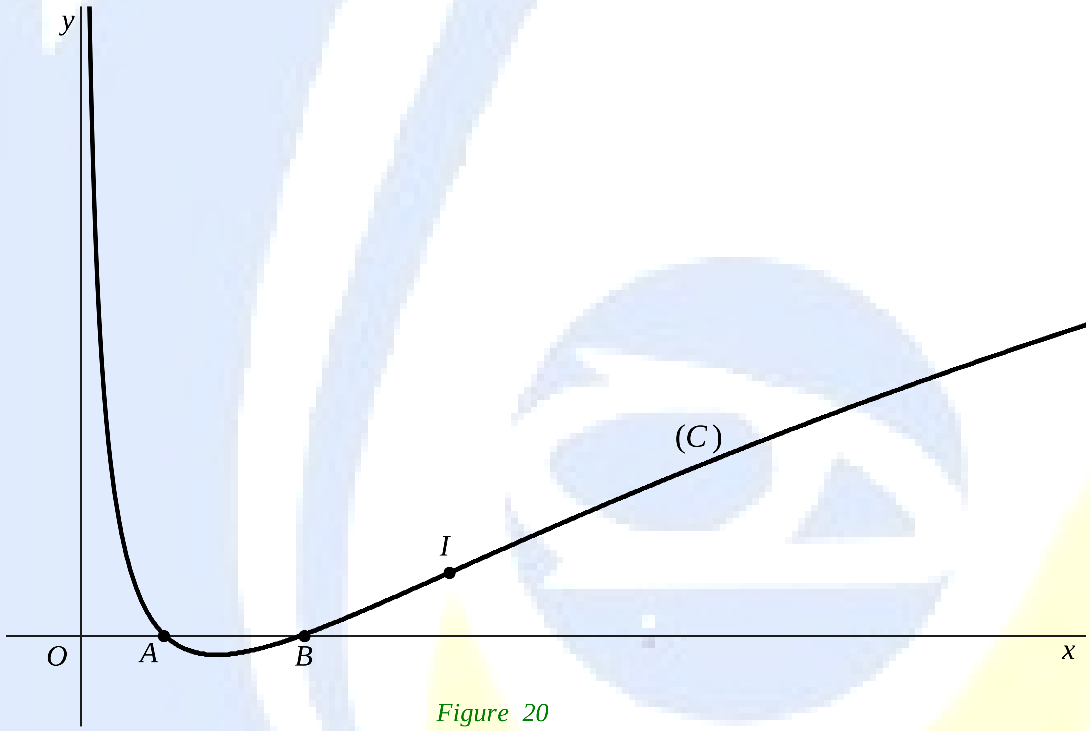


Figure 20

5- a) Une équation du tangente (d) à (C) au point M d'abscisse α est $y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$;

$$(d)\ :\ y = \frac{2\ell n\alpha - 1}{\alpha}(x-\alpha) + \ell n^2\alpha - \ell n\alpha\ .$$

b) (d) coupe $y'y$ au point d'ordonnée $\beta = \ell n^2\alpha - 3\ell n\alpha + 1$.

c) $\beta = \ell n^2\alpha - 3\ell n\alpha + 1 = \left(\ell n\alpha - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4}$ alors, comme α trace $]0\,;+\infty[$, β trace $[-\dfrac{5}{4}\,;+\infty[$ et prend sa valeur minimale valeur $\beta_0 = -\dfrac{5}{4}$ quand $\ell n\alpha = \dfrac{3}{2}$; $\alpha = e\sqrt{e}$; telque $M = I$.

6- a) $\beta = m$ est équivalente à $\left(\ell n\alpha - \dfrac{3}{2}\right)^2 = m + \dfrac{5}{4}$.

Pour tous $m > \beta_0$, l'équation $\beta = m$ est équivalente à $\ell n\alpha - \dfrac{3}{2} = \sqrt{m + \dfrac{5}{4}}$ ou $\ell n\alpha - \dfrac{3}{2} = -\sqrt{m + \dfrac{5}{4}}$;

alors , ils existent deux points M_1 et M_2 sur (C) avec abscisses α_1 et α_2 tel que

$\ell n\alpha_1 = \dfrac{3}{2}+\sqrt{m+\dfrac{5}{4}}$ et $\ell n\alpha_2 = \dfrac{3}{2}-\sqrt{m+\dfrac{5}{4}}$ ou la tangente à (C) coupe l'axe des ordonnées au point avec ordonnée m .

.

b) $\ell n\alpha_1 + \ell n\alpha_2 = 3$ alors $\ell n(\alpha_1\alpha_2) = 3$; tel que $\alpha_1\,\alpha_2 = e^3$.

OU a) $\beta = m$ est équivalente à $\ell n^2\alpha - 3\ell n\alpha + 1 - m = 0$; $(\ell n\alpha)^2 - 3\ell n\alpha + 1 - m = 0$.

Pour l'équation quadratique $\ell n\alpha$: $(\ell n\alpha)^2 - 3\ell n\alpha + 1 - m = 0$, $\Delta = 4m+5$ alors ,

Pour tous $m > \beta = -\dfrac{5}{4}$, cette équation a deux solutions en $\ell n\alpha$ et , $\ell n\alpha$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle, donc ils existent deux valeurs de α pour lequel $\beta = m$; donc ils existent deux points M_1 et M_2 sur (C) ou la tangent à (C) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée m .

b) $\ell n\alpha_1$ et $\ell n\alpha_2$ sont les solutions de l'équation quadratique dans $\ell n\alpha$: $(\ell n\alpha)^2 - 3\ell n\alpha + 1 - m = 0$; donc $\ell n\alpha_1 + \ell n\alpha_2 = 3$ alors $\ell n\left(\alpha_1 \times \alpha_2\right) = 3$; tel que $\alpha_1\,\alpha_2 = e^3$.

c) Les tangentes à (C) de E et B se coupent sur l'axe des ordonnées si et seulement si l'abscisse est telle qui $x_B \times x_E = e^3$ ou $x_B = e$ alors $x_E = e^2$; $E(e^2\,;\,2)$

7- a) Soit $u(x) = (\ell n x)^n$ et $v'(x) = 1$ alors $u'(x) = n\dfrac{(\ell n x)^{n-1}}{x}$ et $v(x) = x$; donc

$$I_n = \int_1^e (\ell n x)^n\,dx = \left[x(\ell n x)^n\right]_1^e - n\int_1^e (\ell n x)^{n-1}dx = e - nI_{n-1} .$$

b) Pour tous x dans $[1\,;\,e]$, $f(x) \le 0$ alors , La surface nécessaire S est telle que

$$S = -\int_1^e f(x)\,dx \quad \textit{unité de surface} .$$

$$\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e (\ell n^2 x - \ell n x)dx = I_2 - I_1 .$$

$I_0 = \displaystyle\int_1^e dx = [\,x\,]_1^e = e - 1$ alors $I_1 = e - I_0 = 1$ et $I_2 = e - 2I_1 = e - 2$; donc $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx = e - 3$.

Finalement , $S = 3 - e$ *unité de surface*; tel que $S = 12 - 4e \;\; cm^2$.