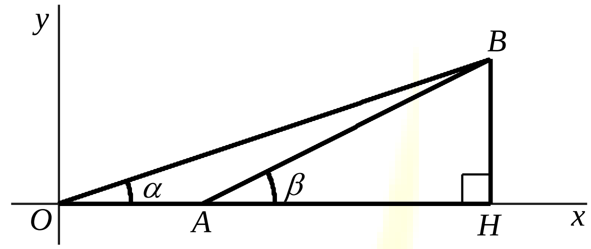
UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2012 - 2013 **Mathématiques** **Durée : 3 heures**
07 juillet 2012

La distribution des notes est sur 25



I- (1,5 pt) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine O. On considère les points $A(1\,;\,0)$ et $B(3\,;\,1)$.

Soit z_1 l'affixe de $\overrightarrow{OB}$ et z_2 celle de $\overrightarrow{AB}$.

1- Déterminer un argument de $z_1\,z_2$ en fonction de α et β .

2- Déterminer la forme algébrique de chacun de z_1 , z_2 et $z_1\,z_2$.

3- Déduire la valeur de la somme $\alpha+\beta$.

II- (3,5 pts) On considère la suite (I_n) définie , pour $n \geq 1$, par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx$.

1- Calculer I_1 et I_2 .

2- Démontrer que , pour tout $n \geq 1$, $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$. Déduire $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \tan^3 x\, dx$ et $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\, dx$.

3- a) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_n \geq 0$. En déduire que $I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

b) Démontrer que la suite (I_n) est décroissante . En déduire que $I_n \geq \dfrac{1}{2(n+1)}$.

4- Démontrer que la suite (I_n) est convergente et calculer sa limite .

III- (5,5 pts) ***A-*** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct .

1- Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 - 2(1+\cos 2\alpha)z + 2(1+\cos 2\alpha) = 0$ où $\alpha \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

2- Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $q = 1+\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$.

3- On considère le nombre complexe $z = \dfrac{4}{q^2}$ et on désigne par M son image .

a) Déterminer la forme exponentielle de z en fonction de α . En déduire que $z = 1-\tan^2\alpha - 2i\tan\alpha$.

b) Démontrer que , quand α décrit $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, l'ensemble de M est une partie d'une parabole à déterminer .

B- On considère la parabole (P) d'équation $y^2 = 4 - 4x$.

1- Déterminer le sommet S de (P) et tracer (P) dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

2- Soit A et B deux points de (P) distincts de S tels que (SA) and (SB) soient perpendiculaires.

Soit $2a$ et $2b$ les ordonnées respectives de A et B .

a) Déterminer b en fonction de a .

b) Démontrer que , quand a varie dans IR^*, (AB) passe par le point fixe I tel que $\overrightarrow{OI} = -3\overrightarrow{OS}$.

c) Soit K le symétrique de S par rapport à (AB) . Montrer que , quand a varie dans IR^*, K varie sur un cercle fixe à déterminer .

d) Déterminer l'abscisse du point d'intersection L des tangentes à (P) en A and B respectivement et montrer que , quand a varie dans IR^*, L varie sur une droite fixe que l'on déterminera .

IV- (3,5 pts) Un débutant du jeu de fléchettes effectue des lancers successifs d'une fléchette . On sait que :

- La probabilité qu'il atteigne la cible au premier lancer est 0.5 .
- S'il atteint la cible à un certain lancer , la probabilité qu'il atteigne la cible au lancer suivant est $0,4$.
- S'il manque la cible à un certain lancer , la probabilité qu'il manque la cible au lancer suivant est $0,8$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère les événements A_n : " le joueur atteint la cible au $n^{ième}$ lancer " et B_n : " le joueur manque la cible au $n^{ième}$ lancer " . Soit $p_n = p(A_n)$.

1- Pour tout $n \geq 1$, déterminer $p(A_{n+1}/A_n)$ et $p(A_{n+1}/B_n)$.

2- Démontrer que , pout tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,2(1+p_n)$.

3- On considère la suite (V_n) définie , pour $n \geq 1$, par $V_n = p_n - 0,25$.

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme .

b) Calculer V_n et puis p_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

4- Sachant que le joueur atteint la cible au second lancer , calculer la probabilité qu'il l'a manquée au premier lancer .

V- (4 pts) On donne un cercle (γ) de diamètre $[BC]$, $BC = 2$, et de centre O.
(d) est la tangente à (γ) en C ; le triangle ABC est direct et équilatéral de centre G . (AB) coupe (γ) en E , (AC) coupe (γ) en F et (BF) coupe (d) en J . D est le milieu de $[CF]$.
Soit S la similitude de centre C qui transforme F en J .

1- a) Déterminer $S(D)$ et $S(A)$.

b) Déterminer le rapport et un angle de S.

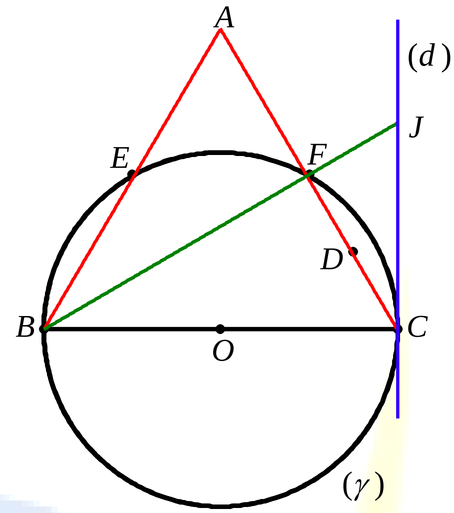
c) Montrer que $S(E) = A$ et que $S(O) = G$.

2- Soit (γ') l'image du cercle (γ) par S.

a) Démontrer que (γ') est le cercle circonscrit au triangle ABC.

b) Démontrer que J appartient à (γ'). Tracer (γ').

c) Calculer l'aire du cercle (γ').



VI- *A*- (7 pts) On considère l'équation différentielle $(E): xy'+(1-x)y+x=0$ où y est une fonction définie sur $IR-\{0\}$.

1- Montrer que la fonction z telle que $z = xy - x$ est la solution générale de l'équation différentielle (I) : $z' - z = -1$.

2- Résoudre l'équation (I) et déterminer la solution générale de l'équation (E).

3- Déterminer la solution particulière de l'équation (E) qui a une limite finie en 0.

***B*-** On considère la fonction f définie sur IR telle que $f(0)=0$ et , si $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x+1-e^x}{x}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$.

1- Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x - e^x$.

Calculer $g(0)$ et $g'(0)$. Déduire $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1-e^x}{x}$ et montrer que f est continue en 0.

2- a) On sait que , pour tout $x \neq 0$, $-x^2 - \dfrac{1}{2}x < f(x) < -\dfrac{1}{2}x$. En déduire que f est dérivable en 0 .

b) Déterminer une équation de la tangente (δ) à (C) en l'origine O .

3- Soit h la fonction définie sur IR par $h(x) = (1-x)e^x$.

Dresser le tableau de variations de h et montrer que , pour tout x dans $IR-\{0\}$, $h(x) < 1$.

4- a) Montrer que , pour tout x dans $IR-\{0\}$, $f'(x) = \dfrac{h(x)-1}{x^2}$ et dresser le tableau de variations de f .

b) Déterminer l'asymptote (d) de (C) à $-\infty$. Tracer (d), (δ) et (C). (***Unité : 2 cm***)

Concours d'entrée 2012 - 2013 **Solution de Mathématiques** **Durée : 3 heures**
07 juillet 2012

Exercice 1

1- La figure montre que $(\overrightarrow{u}\ ; \overrightarrow{OC}) = \alpha\ \ (2\pi)$ et $(\overrightarrow{u}\ ; \overrightarrow{AC}) = \beta\ \ (2\pi)$ alors α est un argument de z_1 et β est un argument de z_2 ; donc $\alpha+\beta$ est un argument de $z_1 z_2$.

2- $\overrightarrow{OC}(3\,;1)$ alors $z_1 = 3+i$ et $\overrightarrow{AC}(2\,;1)$ et $z_2 = 2+i$; donc $z_1 z_2 = (3+i)(2+i) = 5+5i$.

3- $z_1 z_2 = 5+5i = 5\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ alors $\dfrac{\pi}{4}$ est aussi un argument de $z_1 z_2$.

$\alpha+\beta$ et $\dfrac{\pi}{4}$ sont deux arguments du nombre complexe $z_1 z_2$ alors il existe un entier algébrique k tel que $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}+2k\pi$.

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ et $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ alors $0<\alpha+\beta<\pi$; donc $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 2

1- a) ▪ $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\Big[\ell n|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ell n\frac{1}{\sqrt{2}}+\ell n 1 = \ell n\sqrt{2}$.

▪ $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x-1)\,dx == \Big[\tan x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1-\frac{\pi}{4}$.

2- a) $I_n + I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^n x+\tan^{n+2} x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\left(1+\tan^2 x\right)dx = \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$.

b) ▪ La fonction $x \to \tan^3 x$ est impair, alors $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \tan^3 x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\,dx = -I_3 = -\frac{1}{2}+I_1 = -\frac{1}{2}+\ell n\sqrt{2}$

▪ La fonction $x \to \tan^4 x$ est pair, alors $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\,dx = 2I_4 = 2\left(\frac{1}{3} - I_2\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$.

3- a) ▪ Pour tous x dans $[0\,;\frac{\pi}{4}]$, $\tan x \geq 0$ alors , pour tous x dans $[0\,;\frac{\pi}{4}]$ et pour tous $n \geq 1$, $\tan^n x \geq 0$.

$\tan^n x \geq 0$ et $0 < \frac{\pi}{4}$ alors $I_n \geq 0$.

▪ En utilisant la relation $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ nous trouvons $I_n = \frac{1}{n+1} - I_{n+2}$ ou $I_{n+2} > 0$ alors $I_n < \frac{1}{n+1}$.

b) ▪ $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^{n+1} x - \tan^n x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,(\tan x - 1)\,dx$ où, dans l'intervalle $[0\,;\frac{\pi}{4}]$, $\tan^n x \geq 0$

$\tan x \leq 1$ et $0 < \frac{\pi}{4}$ alors $I_{n+1} - I_n \leq 0$; $I_{n+1} \leq I_n$ et (I_n) est décroissant.

▪ (I_n) est décroissant alors $I_n + I_{n+2} \leq 2I_n$.

En utilisant la relation $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ nous trouvons $\frac{1}{n+1} \leq 2I_n$ alors $I_n \geq \frac{1}{2(n+1)}$.

c) La séquence (I_n) est décroissant et limitée en dessous de 0 alors il est convergent.

4 - ▪ (I_n) est décroissant et limitée en dessous de 0 alors (I_n) est convergent.

▪ La limite ℓ devrait satisfaire la relation $\ell + \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}$; donc $2\ell = 0$ et $\ell = 0$.

ou $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n < \frac{1}{n+1}$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$ ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 3

A- 1- Pour tous les nombres α , $z^2 - 2(1+\cos 2\alpha)z + 2(1+\cos 2\alpha) = 0$ est une équation du second degré dont les discriminant est $\Delta' = (1+\cos 2\alpha)^2 - 2(1+\cos 2\alpha) = \cos^2 2\alpha - 1 = -\sin^2 2\alpha = (i\sin 2\alpha)^2$.

Les solutions dans C de l'équation donnée sont $z = 1+\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$ et $z = 1+\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha$.

2- $q = 1+\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$ ou $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$q = 1+\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = 2\cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha = 2\cos\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 2\cos\alpha\, e^{i\alpha}$ où

$\cos\alpha > 0$ puisque $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$; donc, la forme exponentielle de q est $q = 2\cos\alpha\, e^{i\alpha}$.

3- Considère le nombre complexe $z = \dfrac{4}{q^2}$. Soit M est l'image de z.

a) $q^2 = 4\cos^2\alpha\, e^{i2\alpha}$ alors $z = \dfrac{4}{q^2} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} e^{-i2\alpha}$.

$$z = \frac{1}{\cos^2\alpha} e^{-i2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha\right) = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha} i = \frac{2\cos^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha} - \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha} i$$
$$= 2 - \left(1 + \tan^2\alpha\right) - 2\tan\alpha\, i = 1 - \tan^2\alpha - 2\tan\alpha\, i .$$

b) Les coordonnées de M sont $x = 1 - \tan^2\alpha$ et $y = -2\tan\alpha$.

Comme α varie, les coordonnées de M satisfont la relation $x = 1 - \dfrac{1}{4}y^2$ alors M appartient à l'équation parabolique $y^2 = -4(x-1)$.

Comme α trace l'intervalle $]0\,;\dfrac{\pi}{2}[$ l'ordonnée y de M trace l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

Donc l'ensemble de N est la partie de la parabole se trouvant en dessous de l'axe des abscisses .

B- (P) est la parabole de l'équation $y^2 = 4 - 4x$; $y^2 = 4(1-x)$.

1- Le sommet de (P) est le point $S(1\,;0)$.

Traces (P) .

2- L'abscisse de point A de (P) d'ordonnée a tel que $a \neq 0$ est égale à $1-a^2$ alors $A(1-a^2\,;2a)$.

De même pour $B(1-b^2\,;2b)$.

a) $\overrightarrow{SA}(-a^2\,;2a)$ et $\overrightarrow{SB}(-b^2\,;2b)$.

(SA) et (SB) sont perpendiculaire si et seulement si $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = 0$; $a^2b^2 + 4ab = 0$; $ab(ab+4) = 0$

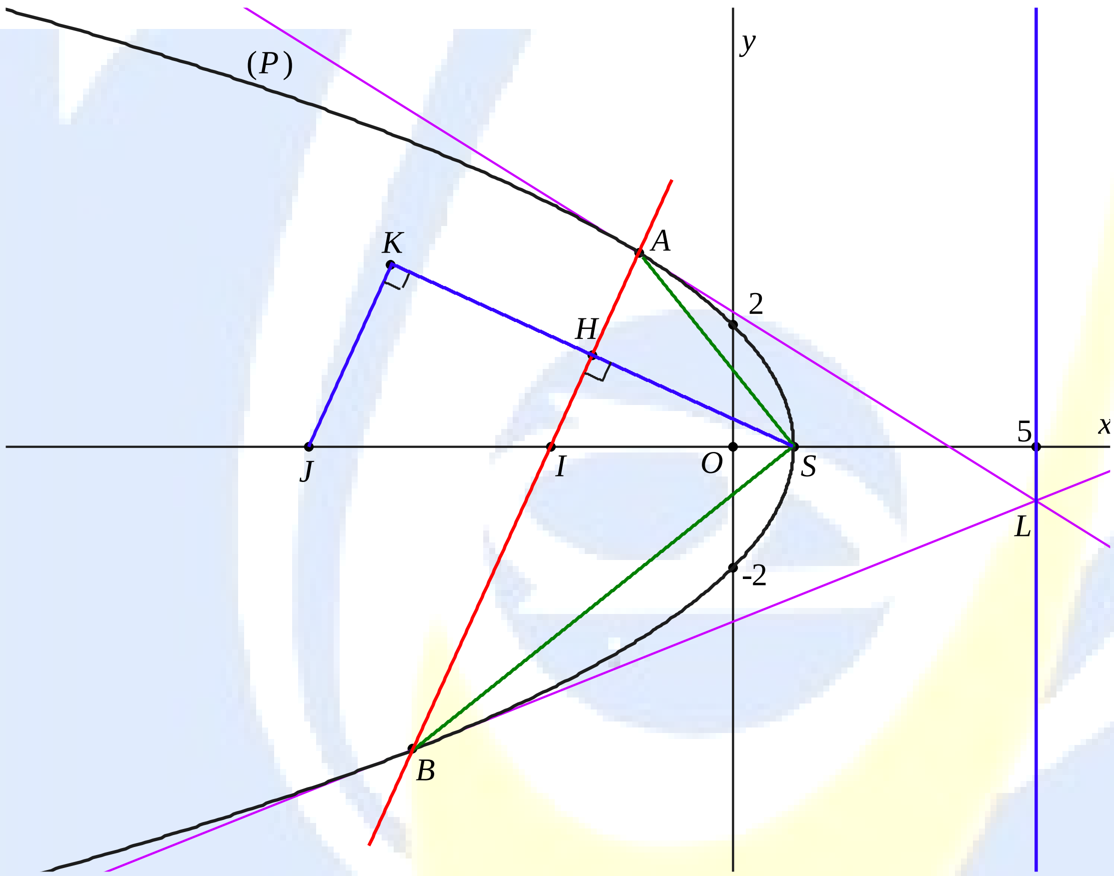
ou $ab \neq 0$ alors $ab + 4 = 0$ et $b = -\dfrac{4}{a}$.

b) Le point I est telle que $\overrightarrow{OI} = -3\overrightarrow{OS}$ alors $I(-3\,;0)$.

$\det(\overrightarrow{IA}\,;\overrightarrow{IB}) = \begin{vmatrix} 4-a^2 & 2a \\ 4-b^2 & 2b \end{vmatrix} = 8b - 2a^2b - 8a + 2ab^2$ avec $b = -\dfrac{4}{a}$ ensuite

$$\det(\overrightarrow{IA}\,;\overrightarrow{IB}) = -\frac{32}{a} + 8a - 8a + \frac{32}{a} = 0 .$$

Donc , comme a varie dans IR^*, A , B et I sont colinéaire alors (AB) passe par I .



c) Soit H est la projection orthogonale de S sur (AB) .

L'angle $S\widehat{H}I$ est droite avec S et I sont fixés alors H varie sur le cercle (γ) de diamètre $[SI]$.

Le symétrique de S par rapport à (AB) est le point K tel que $\overrightarrow{SK} = 2\overrightarrow{SH}$ alors K est l'image de H par la dilatation $h(S\ ;\ 2)$. Donc K varie sur le cercle $(\gamma') = h\big((\gamma)\big)$ de diamètre $[SJ]$.

où $J = h(I)$; $J(-7\ ;\ 0)$.

d) L'équation $y^2 = 4-4x$ donne $2\,y\,y' = -4$ puis la pente de la tangent (P) à A est égale à $-\dfrac{1}{a}$.

Une équation de la tangente (d_1) de (P) à A est $y = -\dfrac{1}{a}(x-1+a^2)+2a$; $y = -\dfrac{1}{a}(x-1-a^2)$.

De même , une équation de la tangente (d_2) de (P) à B est $y = -\dfrac{1}{b}(x-1-b^2)$.

L'abscisse du point de l'intersection L de (d_1) et (d_2) est la solution de l'équation

$\dfrac{1}{a}(x-1-a^2) = \dfrac{1}{b}(x-1-b^2)$; $b(x-1-a^2) = a(x-1-b^2)$; $(a-b)x = a-b+ab^2-ab^2$; $x = 1-ab = 5$.

comme a varie dans IR^*, Le point L qui a une abscisse constante varie de la ligne droite de l'équation $x=5$.

Exercice 4

1- ▪ Il est donnée que, s'il atteint la cible à un jet de certains, la probabilité qu'il atteigne à la lancer suivant est égale à 0.4 ; donc $p(A_{n+1}/A_n) = 0.4$.

▪ S'il manque la cible à une certaine projection, la probabilité qu'il lui manque à la lancer suivant est égale à 0.8 donc $p(B_{n+1}/B_n) = 0.8$.

$p(A_{n+1}/B_n) = p(\overline{B_{n+1}}/B_n) = 1-p(B_{n+1}/B_n) = 0.2$.

2- Pour tous $n \geq 1$, $p_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_{n+1}\cap A_n) + p(A_{n+1}\cap B_n)$.

$$= p(A_n)\times p(A_{n+1}/A_n) + p(B_n)\times p(A_{n+1}/B_n)$$

$$= 0.4p_n + (1-p_n)\times 0.2 = 0.2p_n + 0.2 = 0.2(1+p_n)\ .$$

3- La séquence (V_n) est définie , pour tous $n \geq 1$, par $V_n = p_n - 0.25$.

a) $V_{n+1} = p_{n+1} - 0.25 = 0.2p_n + 0.2 - 0.25 = 0.2p_n - 0.05 = 0.2(p_n - 0.25) = 0.2V_n$. donc (V_n) est une suite géométrique dont le rapport commun est $r = 0.2$ et la première terme $V_1 = p_1 - 0.25 = 0.5 - 0.25 = 0.25$.

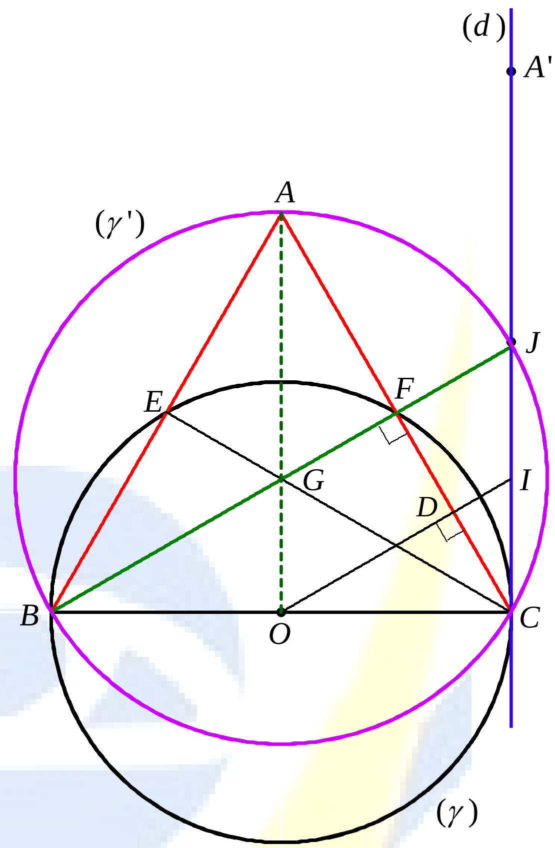
b) $V_n = V_1 \times r^{n-1} = 0.25\times(0.2)^{n-1}$ et $p_n = 0.25\times(0.2)^{n-1} + 0.25$.

Puisque $0 < 0.2 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(0.2)^{n-1} = 0$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0.25$.

4 - La probabilité demandée est

$$p(B_1/A_2) = \frac{p(B_1\cap A_2)}{p(A_2)} = \frac{p(B_1)\times p(A_2/B_1)}{p_2} = \frac{0.5\times 0.2}{0.2p_1+0.2} = \frac{0.5}{p_1+1} = \frac{0.5}{0.5+1} = \frac{1}{3}.$$

Exercise 5



S est la similitude de centre C tel que $S(F)=J$.

1- a) ▪ $S(F)=J$ alors $S([CF])=[CJ]$.

D est le point milieu de $[CF]$ alors $S(D)$ est le point milieu I de $[CJ]$.

▪ Soit $S(A)=A'$.

Le triangle ABC est équilatéral et (BF) est une hauteur de ce triangle ; donc F est le point milieu de $[CA]$.

$S(C)=C$, $S(F)=J$, $S(A)=A'$.

A est le symétrique de C par rapport à F alors A' est le symétrique de C par rapport à J .

$S(F)=J$ et

$$(\overrightarrow{CF}\ ;\ \overrightarrow{CJ}\ )=(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CJ}\ )-(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CF}\ )=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}\ \ (2\pi)$$

alors $-\frac{\pi}{6}$ est un angle de S .

Le rapport de S est $\frac{CJ}{CF}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$S=S(C\ ;\frac{2}{\sqrt{3}}\ ;-\frac{\pi}{6})\ .$$

b) ▪ Dans le triangle CEA nous avons $(\overrightarrow{CE}\ ;\ \overrightarrow{CA}\ )=-\frac{\pi}{6}\ \ (2\pi)$ et $\frac{CA}{CE}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, alors $S(E)=A$.

▪ Dans le triangle COG nous avons $(\overrightarrow{CO}\ ;\ \overrightarrow{CG}\ )=-\frac{\pi}{6}\ \ (2\pi)$ et $\frac{CG}{CO}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, alors $S(O)=G$.

2- Le cercle (γ') est l'image de cercle (γ) par S.

a) (γ) est le cercle de centre O passant à travers E alors l'image (γ') est le cercle de centre $G=S(O)$ passant à travers $A=S(E)$. Donc , (γ') est le cercle circonscrit au triangle ABC .

b) F appartient à (γ) et $S(F)=J$ alors J appartient à (γ') . Tracez (γ')

c) Le rayon de cercle (γ) est $OC = 1$, le rayon de cercle (γ') qui est $S((\gamma))$, est égale

à $\frac{2}{\sqrt{3}}$ puis son aire est $\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}\pi$ *unité d'aire* .

Exercice 6

A- (E) : $xy'+(1-x)y+x=0$ ou y est une fonction définie sur $IR-\{0\}$.

1- Si $z = xy - x$ alors $z' = y + xy' - 1$ et $z' - z = (y + xy' - 1) - (xy - x) = xy' + (1-x)y + x - 1 = -1$.
Donc z est la solution générale de l'équation différentielle (I) : $z' - z = -1$.

2- la solution générale de l'équation réduite $z' - z = 0$ est $z = Ce^x$.
la solution générale de l'équation (I) est $z = Ce^x + 1$.
la solution générale de l'équation (E) est $y = \frac{x+z}{x}$; $y = \frac{x+1+Ce^x}{x}$.

3- $\lim\limits_{x\to 0}(x+1+Ce^x) = 1 + C$.
Si $C \neq -1$ alors , $\lim\limits_{x\to 0} y = \pm\infty$.
Si $C = -1$ alors , $\lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-e^x}{1} = 0$.
La solution particulière de l'équation (1) qui a une limite finie à 0 est $y = \frac{x+1-e^x}{x}$.

B- La fonction f est définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = \frac{x+1-e^x}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1- La fonction g est définie sur IR par $g(x) = x - e^x$.
$g(0) = -1$; $g'(x) = 1 - e^x$ alors $g'(0) = 0$.
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1-e^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) = 0$.
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1-e^x}{x} = 0 = f(0)$; Donc f est continue au 0.

2- Pour tous $x \neq 0$, $-x^2 - \frac{1}{2}x < f(x) < -\frac{1}{2}x$.

- Pour tous $x<0$, $-\frac{1}{2}<\frac{f(x)}{x}<-x-\frac{1}{2}$ avec $\lim\limits_{x\to 0^-}(-x-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{2}$.

- Pour tous $x>0$, $-x-\frac{1}{2}<\frac{f(x)}{x}<-\frac{1}{2}$ avec $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}$ qui est fini, alors f est différentiable à 0 et $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

Une équation de la tangente (δ) à (C) , l'origine est $y=-\frac{1}{2}x$.

3- La fonction h est définie sur IR par $h(x)=(1-x)e^x$.

$\lim\limits_{x\to -\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(e^x-xe^x)=0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}h(x)=-\infty$

$h'(x)=-xe^x$.

Tableau de variation de h

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Le tableau de variation de h montre que $h(0)=1$ est le maximum absolu de h et , pour tous x dans $IR-\{0\}$, $h(x)<1$.

4- a) Pour x dans $IR-\{0\}$, $f(x)=\frac{x+1-e^x}{x}$ alors $f'(x)=\frac{(1-x)e^x-1}{x^2}=\frac{h(x)-1}{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{e^x}{x}\right)=1.$

$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$

Pour x in $IR-\{0\}$, $f'(x)=\frac{h(x)-1}{x^2}<0$ ensuite $h(x)<1$.

Le Tableau de variation de f .

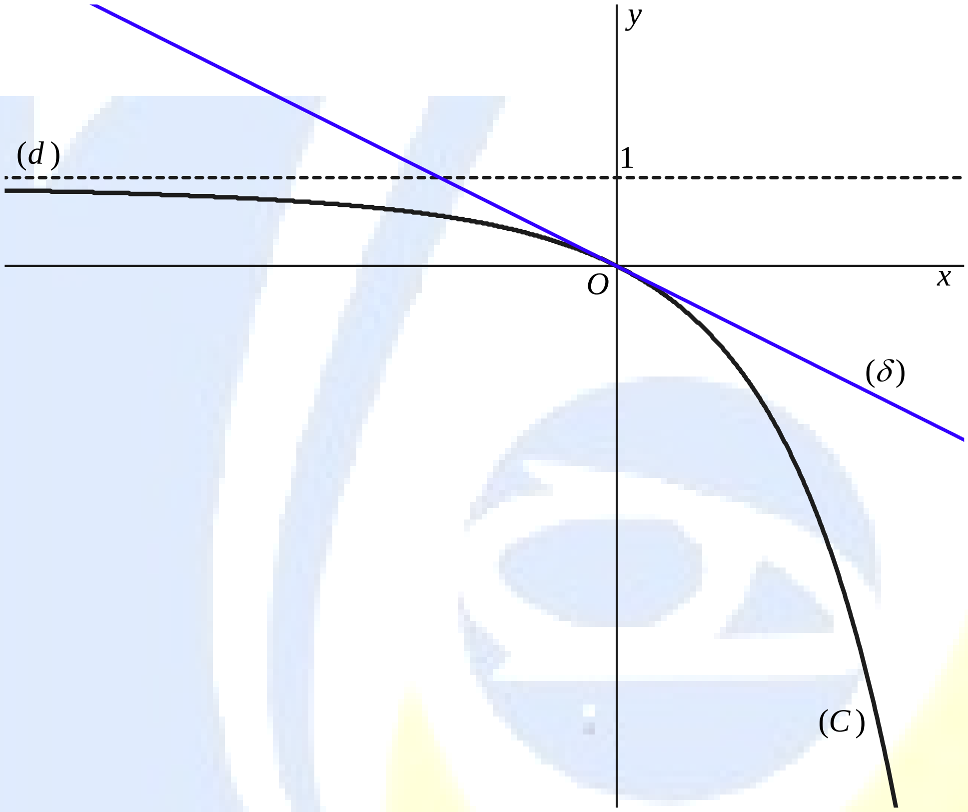
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}g(x)=1$ puis la ligne droite (d) est asymptote à (C) jusqu'a $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+1-e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}\right)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$.

Donc (C) a en $+\infty$ une direction parallèle asymptote à l'axe des ordonnées.

Tracez (d), (δ) et (C). (**_Unite: 2 cm_**)


y
(d)
1
O
x
(δ)
(C)