UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2011 - 2012 **Mathématiques** **Durée : 3 heures**

La distribution des notes est sur 25 **02 juillet 2011**

I- (3 points) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

On pose $z = r\,e^{i\alpha}$ où r est un réel positif tel que $r \neq 1$.

On considère les points A , B , C et D d' affixes respectives $z_A = z$, $z_B = \dfrac{1}{z}$, $z_C = \dfrac{\bar{z}}{z^2}$ et $z_D = -\bar{z}$.

1- Déterminer la forme exponentielle de $\dfrac{z_A}{z_C}$. En déduire l'ensemble des valeurs de α telles que O appartient au segment $]AC[$.

2- On Suppose dans cette partie que $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

a) Montrer que $z_C - z_D = \overline{z_A - z_B}$

b) Calculer $z_A - z_D$ et $z_B - z_C$ en fonction de r et montrer que ces nombres sont deux réels distincts.

c) Montrer que $ABCD$ est un trapèze isocèle dont les diagonales se coupent en O .

II- (2.5 points) On considère la suite (U_n) de premier terme U_0 telle que, pour tout n , $3U_{n+1} - 6 = (U_n - 2)(U_n + 1)$.

1- Si la suite (U_n) converge, quelle est la valeur de sa limite ℓ ?

2- Montrer que si $U_0 \in \{-1\,;2\}$ alors, pour tout $n \geq 1$, $U_n = 2$.

3- Calculer $3U_{n+1} - 3U_n$ en fonction de U_n et montrer que, si $U_0 \notin \{-1\,;2\}$, alors (U_n) est croissante .

4- Montrer que si $U_0 \in]-1\,;2[$ alors, pour tout entier naturel n, $U_n \in]-1\,;2[$ et (U_n) est convergente .

5- Montrer que si $U_0 > 2$ alors, pour tout entier naturel n, $U_n > 2$ et (U_n) est divergente .

III- (4 points) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Soit T la transformation d'expression complexe $Z = (3+4i)\bar{z} - 8 - 4i$.

1- Montrer que T admet un point invariant dont les coordonnées sont à déterminer.

2- Déterminer l'expression complexe de l'homothétie h de centre $\omega(2\,;1)$ et de rapport 5 .

3- On pose $S = T \circ h^{-1}$.

a) Montrer que $z' = (\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i)\bar{z}$ est l'expression complexe de S .

b) Déterminer l'ensemble (d) des points invariants par S et vérifier que ω et O appartiennent à (d) .

4- Soit $M(z)$ un point quelconque du plan et $M'(z')$ son image par S .

Montrer que $|z'| = |z|$ et $|z' - z_\omega| = |z - z_\omega|$. En déduire que S est la réflexion (symétrie) d'axe (d) .

5- a) Montrer que $T = S \circ h$.

b) Un point M n'appartenant pas à (d) étant donné. Décrire la construction du point $M' = T(M)$.

IV- (2.5 points) Une étude statistique concernant une certaine maladie a été faite dans des familles ayant deux enfants : une fille et un garçon. On a trouvé les résultats suivants :

- 50% des garçons et 20% des filles sont atteints par cette maladie.
- dans les familles dont le garçon est malade, la fille l'est aussi dans 25% des cas .

On choisit au hasard l'une des familles concernées.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : " les deux enfants sont atteints par la maladie " ;
B : " l'un des deux enfants seulement est atteint " ;
C : " aucun des deux enfants n'est atteint " ;
D : " le garçon est atteint sachant que la fille l'est aussi " ;
E : " la fille est atteinte sachant que le garçon ne l'est pas " .

V- (7 points) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

A- On considère l'équation différentielle (E) : $y'-y=e^{x}-1$; $x\in IR$.

Soit z une fonction dérivable telle que $y=ze^{x}+1$.

1- Déterminer l'équation différentielle (1) dont la solution générale est la fonction z .

2- Résoudre l'équation (1) et déduire la solution générale de (E) .

B- On considère la fonction p définie dans IR par $p(x)=(x+a)e^{x}+1$ où a est un paramètre réel.

Soit (γ) la courbe représentative de p .

1- Montrer que, pour tout réel a , (γ) admet une asymptote fixe à déterminer .

2- a) Montrer que les solutions des équations $p''(x)=0$; $p'(x)=0$; $p(x)=1$ sont 3 termes consécutives d'une suite arithmétique croissante dont on déterminera la raison.

b) Déterminer a tel que le quatrième terme de cette suite soit la solution de l'équation $p(x)=e+1$.

3- a) Dresser le tableau de variations de p et montrer que, pour tout réel a , p admet un minimum .

b) Déterminer, quand a varie, l'ensemble du point S de (γ) correspondant au minimum de p .

c) Déterminer l'ensemble des valeurs de a telles que, pour tout réel x , $p(x)\geq 0$.

d) Déduire le signe des fonctions f et g définies dans IR par $f(x)=xe^{x}+1$ et $g(x)=(x-1)e^{x}+1$.

C- On considère la fonction h telle que $h(x)=\dfrac{xe^{x}}{xe^{x}+1}$. Soit (L) la courbe représentative de h .

1- a) Justifier que h est définie dans IR .

b) Dresser le tableau de variations de h .

2- a) Vérifier que (L) passe par O et écrire une équation de la tangente (d) à (L) en ce point.

b) Vérifier que, pour tout réel x , $h(x)-x=-\left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]x$.

c) Déterminer la position relative de (L) et (d) . Que représente le point O pour (L) ? Tracer (L) et (d) .

3- a) Montrer que la restriction de h sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$ admet une fonction réciproque h^{-1}.

b) Montrer que la courbe représentative (L') de h^{-1} est tangente à (L) en O. Tracer (L') .

VI- (6 points) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

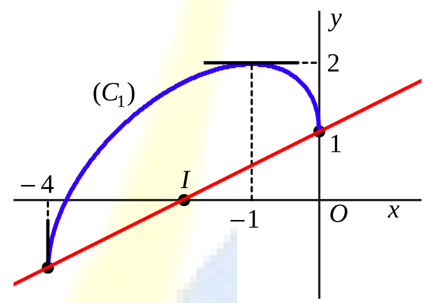
A- On considère les droites (δ) et (Δ) d'équations respectives $x=-4$ et $x-2y+2=0$.
Soit M un point quelconque situé entre (δ) et l'axe des ordonnées $y'y$. On désigne par H , H' et K les projetés orthogonaux de M sur $y'y$, (δ) et (Δ) respectivement . Montrer que l'ensemble des points M tels que $5MK^2 = 3MH \times MH'$ est la courbe (C) d'équation $(x-2y+2)^2 = -3x(x+4)$.

B- On considère la courbe (C_1) d'équation $y=\frac{1}{2}\left(x+2+\sqrt{-3x^2-12x}\right)$.

1- Déterminer une équation de la courbe (C_2) , le symétrique de (C_1) par rapport au point $I(-2\,;0)$.

2- Montrer que $(C)=(C_1)\cup(C_2)$.

3- La courbe (C_1) est tracée dans la figure ci-contre .Tracer (C). (***Unité :*** 2 ***cm***)



C- Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

1- Montrer que $x^2+3y^2+2\sqrt{2}\,x-6\sqrt{2}\,y+2=0$ est une équation de l'image (E) de (C) par r.

2- a) Montrer que (E) est une ellipse dont l'aire est $S=8\sqrt{3}\,\pi\ cm^2$.

b) En déduire que (C) est une ellipse de centre I et calculer son aire. Déduire $\int_{-4}^{0}\sqrt{-3x^2-12x}\,dx$.

c) Déterminer l'axe focal de (C) ainsi que les coordonnées de l'un de ses foyers.

Concours d'entrée 2011 - 2012 **Mathématiques** **Durée : 3 heures**
La distribution des notes est sur 25 **02 juillet 2011**

Exercise 1

1- ▪ $\dfrac{z_A}{z_C} = \dfrac{z^3}{\bar{z}} = \dfrac{r^3 e^{3i\alpha}}{r e^{-i\alpha}} = r^2 e^{4i\alpha}$.

▪ $(\overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OA}) = \arg\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right) = 4\alpha \quad (2\pi)$.

O, A et C telles que $O \in [AC]$ si, et seulement si $(\overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OA}) = \pi + 2k\pi$; Alors

$4\alpha = \pi + 2k\pi$ et $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ ou $k \in Z$.

2- On Suppose que $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

a) ▪ $z_C - z_D = \dfrac{1}{r} e^{-i\frac{3\pi}{4}} + r e^{-i\frac{\pi}{4}} = r e^{-i\frac{\pi}{4}} - \dfrac{1}{r} e^{i\frac{\pi}{4}} = \overline{z_A - z_B}$.

b) ▪ $z_A - z_D = z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) = 2r\cos\dfrac{\pi}{4} = r\sqrt{2}$.

▪ $z_B - z_C = \dfrac{1}{r} e^{-i\frac{\pi}{4}} - \dfrac{1}{r} e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \dfrac{1}{r} e^{-i\frac{\pi}{4}} + \dfrac{1}{r} e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{r}(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{1}{r}(2\cos\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{r}$.

▪ Pour tous valeur de r dans $]0\,;+\infty[-\{1\}$, les deux nombres $z_A - z_D$ et $z_B - z_C$ sont des nombres réels .

▪ Pour $r \neq 1$ et $r \neq \dfrac{1}{r}$ alors $z_A - z_D \neq z_B - z_C$.

c) ▪ $z_A - z_D$ et $z_C - z_D$ sont des nombres réels les deux droites (AD) and (BC) sont parallèle à l'axe d'abscisse $x'x$, alors (AD) et (BC) sont parallèles .

▪ $AD \neq BC$ alors $z_A - z_D \neq z_B - z_C$.

▪ $z_C - z_D = \overline{z_A - z_B}$ et $|z_A - z_B| = |z_C - z_D|$ alors $AB = CD$.

Ce qui montre que $ABDC$ est un trapèze isocèle.

▪ $\dfrac{z_A}{z_C} = r^2 e^{i\pi} = -r^2$ et $\dfrac{z_B}{z_C} = -\dfrac{1}{r^2}$.

$\dfrac{z_A}{z_C}$ et $\dfrac{z_B}{z_C}$ sont des nombres négatives, $O \in [AC]$, $O \in [BD]$ et les diagonales $[AD]$, $[BC]$ sont intersectés à O .

Exercise 2

La suite (U_n) est définie par le premier terme U_0 et par la relation $3U_{n+1}-6=(U_n-2)(U_n+1)$.

1- Si la suite (U_n) converge, la valeur de sa limite ℓ est : $3\ell-6=\ell^2-\ell-2$;
$\ell^2-4\ell+4=0$; $(\ell-2)^2=0$; alors $\ell=2$.

2- ▪ $3U_1-6=(U_0-2)(U_0+1)$; si $U_0=2$ ou $U_0=-1$ alors $U_1=2$.

▪ si , pour tout $n\geq1$, $U_n=2$ alors , $3U_{n+1}-6=(U_n-2)(U_n+1)=0$; et $U_{n+1}=2$.
Donc, pour tout $n\geq1$, $U_n=2$.

3- ▪ $3U_{n+1}-3U_n=U_n^2-4U_n+4=(U_n-2)^2$.

▪ Pour tout n dans IN $U_{n+1}-U_n\geq0$ alors, (U_n) est croissante.

4- ▪ $U_0\in\left]-1\,;2\right[$

▪ Si pour une certaine valeur de n, $U_n\in\left]-1\,;2\right[$ puis , $U_n+1>0$ et $U_n-2<0$; donc $3U_{n+1}-6<0$ et $U_{n+1}<2$. alors, pour tout entier naturel n dans IN, $U_n<2$.

La suite (U_n) est croissante, et, pour tout entier naturel n dans IN, $U_n\geq U_0>-1$.
Finalement, pour tout entier naturel n dans IN, $U_n\in\left]-1\,;2\right[$.
La suite (U_n) est strictement croissante est majorée par 2 ; donc il est convergent
Et sa limite, selon la partie 1 , est égale a 2 .

5- ▪ $U_0>2$.

▪ Si pour une certaine valeur de n dans IN , $U_n>2$, $U_n+1>0$ et $U_n-2>0$; donc $4U_{n+1}-8>0$ et $U_{n+1}>2$. Alors pour tout valeur de n dans IN , $U_n>2$.
La suite (U_n) ne peut converger par la limite éventuelle de 2 ; alors il est divergente.

Exercise 3

1- Les coordonnées de l'invariant $(x\,;y)$ de T est la solution de l'équation $z=(3+4i)\bar{z}-8-4i$ qui est équivalente à $x+iy=(3+4i)(x-iy)-8-4i$; $2(x+2y-4)+4(x-y-1)i=0$;
$x+2y-4=0$ et $x-y-1=0$; $x=2$ et $y=1$. Le point invariant de T est $\omega(2\,;1)$

2- La relation complexe de l'homothétie $h=h(\omega\,;5)$ est $z'=5z+(1-5)z_\omega$; $z'=5z-8-4i$.

3- L'expression complexe de l'homothétie h^{-1} est de centre $\omega(2\,;1)$ et de rapport $\frac{1}{5}$; alors la relation complexe est $z' = \frac{1}{5}z + \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$.

a) Soit M un point d'affixe z .

$$\begin{tikzcd}
M(z) \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "S \circ h^{-1}"'] & M_1(z_1) \arrow[r, "S"] & M'(z')
\end{tikzcd}$$

Figure 13

$z_1 = \frac{1}{5}z + \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$ et $z' = (3+4i)\overline{z_1} - 8 - 4i$

$z' = (3+4i)\,(\frac{1}{5}\bar{z} + \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i) - 8 - 4i = (\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)\bar{z} + 8 + 4i - 8 - 4i$; $z' = (\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)\bar{z}$.

b) L'ensemble des points invariants par S est l'ensemble (d) de point $M(x\,;\,y)$ tel que :

$z = (\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)\bar{z}$

$x + iy = (\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)(x - iy)$; $2(x-2y) - 4(x-2y)i = 0$; alors $x - 2y = 0$.

Donc (d) est la droite de l'équation $x - 2y = 0$ passe par ω et O.

4- $M(z)$ est un point quelconque de (P) et $M'(z')$ son image par S alors $z' = (\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)\bar{z}$.

$|z'| = \left|(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)\bar{z}\right| = \left|\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right| \times |\bar{z}| = |\bar{z}| = |z|$.

$|z' - z_\omega| = \left|(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)\bar{z} - (\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)\bar{z}_\omega\right| = \left|\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right| \times |\bar{z} - \bar{z}_\omega| = |z - z_\omega|$.

$|z'| = |z|$ est équivalente à $OM = OM'$ et $|z' - z_\omega| = |z - z_\omega|$ est équivalente à $\omega M = \omega M'$ alors la droite $(O\omega)$, (d), est la médiatrice de $[MM']$.
Donc S est la réflexion d'axe (d).

5- a) $S = T \circ h^{-1}$ est équivalente à $S \circ h = \left(T \circ h^{-1}\right) \circ h = T \circ \left(h^{-1} \circ h\right) = T$.

b) M est un point n'appartenant pas à (d) ; $M' = T(M) = (S \circ h)(M) = S(h(M)) = S(N)$ où $N = h(M)$.
Donc M' est la symétrique par rapport à (d) d'image M sous h.

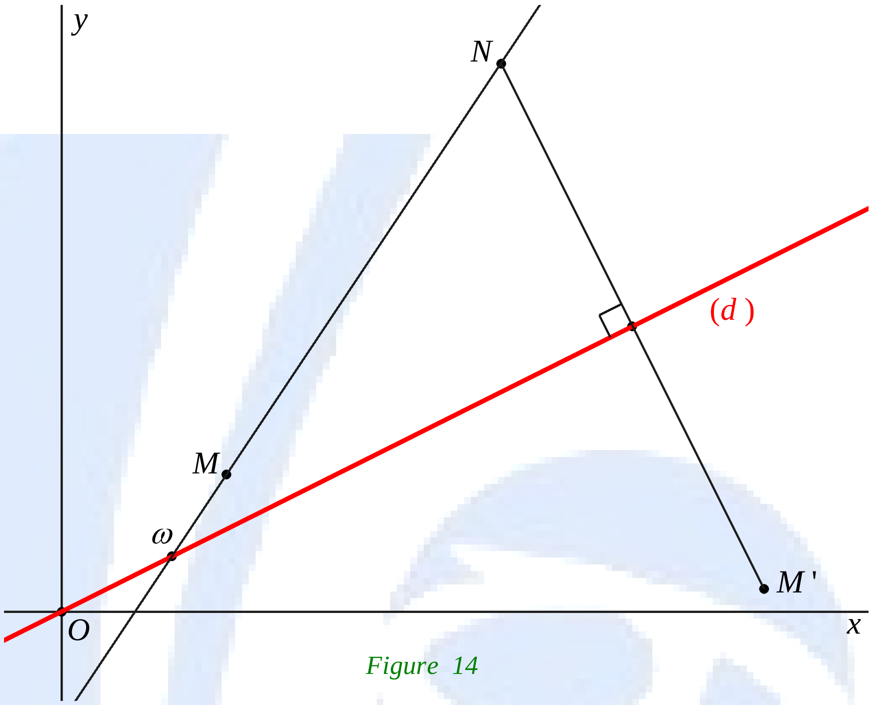


Figure 14

Exercise 4

Considérons les évènements :

M : " Les garçons des familles sont atteints par cette maladies "

F : " Les filles des familles sont atteints par cette maladies ".

- 50% des garçons sont atteints par cette maladies, $p(M)=\frac{1}{2}$
- 20% des filles sont atteints par cette maladies $p(F)=\frac{1}{5}$
- Dans les familles dont le garçon est malade, la fille l'est aussi dans 25% des cas, $p(F/M)=\frac{1}{4}$

A : " les deux enfants sont atteints par la maladie " ; $A=M\cap F$.

$$p(A)=p(M\cap F)=p(M)\times p(F/M)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

B : " l'un des deux enfants seulement est atteint " ; $B=M\cup F-M\cap F$.

$$p(B)=p(M)+p(F)-2\,p(M\cap F)=p(M)+p(F)-2p(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}=\frac{9}{20}\ .$$

C : " aucun des deux enfants n'est atteint " ; $C = \overline{M} \cap \overline{F} = \overline{M \cup F}$.

$p(C) = p(\overline{M \cup F}) = 1 - p(M \cup F) = 1 - p(M) - p(F) + p(A) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{17}{40}$.

D : " le garçon est atteint sachant que la fille l'est aussi " ; $D = M / F$.

$p(D) = p(M/F) = \frac{p(M \cap F)}{p(F)} = \frac{p(A)}{p(F)} = \frac{1}{8} \times 5 = \frac{5}{8}$.

E : " la fille est atteinte sachant que le garçon ne l'est pas " . $E = F / \overline{M}$.

$p(E) = p(F/\overline{M}) = \frac{p(\overline{M} \cap F)}{p(\overline{M})} = \frac{p(F) - p(M \cap F)}{1 - p(M)} = \frac{p(F) - p(A)}{1 - p(M)} = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) \div \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{20}$.

Exercise 5

A- (E) : $y' - y = e^x - 1$; $x \in IR$.

1- Si $y = ze^x + 1$ alors $y' = z'e^x + ze^x$.

Par substitution dans l'équation (E) on trouve que $(z'e^x + ze^x) - (ze^x + 1) = e^x - 1$;

$z'e^x - 1 = e^x - 1$; $z'e^x = e^x$; $z' = 1$; alors (1) : $z' = 1$.

2- La solution générale de l'équation (1) est $z = x + a$ où $a \in IR$; donc la solution générale de l'équation (E) est $p(x) = (x + a)e^x + 1$.

B- La fonction p est définie dans IR par $p(x) = (x + a)e^x + 1$ où a est un paramètre réel.

1- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$; pour tout réel a sur IR , $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x + ae^x + 1) = 1$.

quand a varie , (γ) admet une asymptote fixe de l'équation $y = 1$.

2- $p(x) = (x + a)e^x + 1$; $p'(x) = (x + a + 1)e^x$; $p''(x) = (x + a + 2)e^x$

a) ▪ l'équation $p''(x) = 0$ est équivalente à $(x + a + 2)e^x = 0$; $x + a + 2 = 0$; $x = -a - 2$.

▪ l'equation $p'(x) = 0$ est équivalente à $(x + a + 1)e^x = 0$; $x + a + 1 = 0$; $x = -a - 1$.

▪ l'equation $p(x) = 1$ est équivalente à $(x + a)e^x = 0$; $x + a = 0$; $x = -a$.

Les solutions sont , par ordre $-a - 2$; $-a - 1$; $-a$, 3 termes consécutives d'une suite arithmétique croissante d'une différence commune 1 .

b) le quatrième terme de cette suite est $-a + 1$; cette nombre est la solution de l'équation $f(x) = e + 1$ si, est seulement si, $f(-a + 1) = e + 1$; $e^{-a+1} + 1 = e + 1$; $e^{-a+1} = e$; $-a + 1 = 1$; $a = 0$.

3- a) $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$

$p'(x) = (x + a + 1)e^x$.

Le tableau de variations de p

x	$-\infty$		$-a-1$		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	
$p(x)$	1	↘	$1 - e^{-a-1}$	↗	$+\infty$

Figure 17

Le tableau de variations de p montre que

Pour tout réel a dans IR, p admet un minimum à $-a-1$.

b) L'ensemble du point S de (γ) correspondant au minimum de p sont :
$x=-a-1$ et $y=1-e^{-a-1}$ tel que, quand a varie, la relation $y=1-e^{x}$.
Donc, quand a varie , L'ensemble de S est la courbe de l'équation $y=1-e^{x}$.

c) Le tableau de variations de p montre que p a une minimum absolue est égale à $1-e^{-a-1}$.
Donc $p(x)\geq 0$ pour tout réel x dans IR, si, et seulement si, $1-e^{-a-1}\geq 0$.
$1-e^{-a-1}\geq 0$ est équivalente à $e^{-a-1}\leq 1$; $-a-1\leq 0$; $a\geq -1$.

d) Les fonctions f et g définies dans IR par $f(x)=xe^{x}+1$ et $g(x)=(x-1)e^{x}+1$ correspondant à $a=0$ and $a=-1$, alors, pour tout réel x dans IR, $f(x)\geq 0$ et $g(x)\geq 0$.

C- Le fonction h est : $h(x)=\dfrac{xe^{x}}{xe^{x}+1}=\dfrac{xe^{x}}{f(x)}$.

1- a) Dans le partie **B**-1) that , pour tout réel x dans IR, $f(x)>0$; donc $f(x)\neq 0$ et h est définie dans IR .

b) ▪ Pour tout réel x dans IR, $h(x)=\dfrac{xe^{x}+1-1}{f(x)}=\dfrac{f(x)-1}{f(x)}=1-\dfrac{1}{f(x)}$.

▪ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$; donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=1-1=0$.

▪ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1-0=1$.

▪ $h(x)=1-\dfrac{1}{f(x)}$; alors $h'(x)=\dfrac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^{2}}$.

$h'(x)$ et $f'(x)$ ont les mêmes signes dans IR .
Le tableau de variations de h

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	↘	$\frac{1}{1-e}$	↗	1

Figure 21

2- a) $h(0)=0$; donc (L) passe par l'origine.
Une équation de la tangente (d) à (L) en ce point est $y=h'(0)x$; (d) : $y=x$.

b) Pour tout réel x dans IR, $h(x)-x=\dfrac{xe^{x}}{f(x)}-x=\dfrac{xe^{x}-x\,f(x)}{f(x)}=-\dfrac{\left(f(x)-e^{x}\right)x}{f(x)}=-\left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]x$.

c) La position relative de (L) et (d) dépend au signe de $h(x)-x$.
Le signe de $h(x)-x$ est opposé à x alors , pour tout réel x dans IR, $g(x)>0$ et $f(x)>0$.
▪ Si $x\in\,]-\infty\,;0[$, $h(x)-x>0$ et (L) situe au-dessus (d) .
▪ If $x\in\,]0\,;+\infty[$, $h(x)-x<0$ and (L) situe au-dessous (d) .
La position relative de (L) et (d) changent à l'origine; alors cette point est une point d'inflexion de (L).

$\lim_{x\to -\infty} h(x)=0$ et $\lim_{x\to +\infty} h(x)=1$; le droite de l'équations $y=0$ et $y=1$ sont asymptotes à (L).

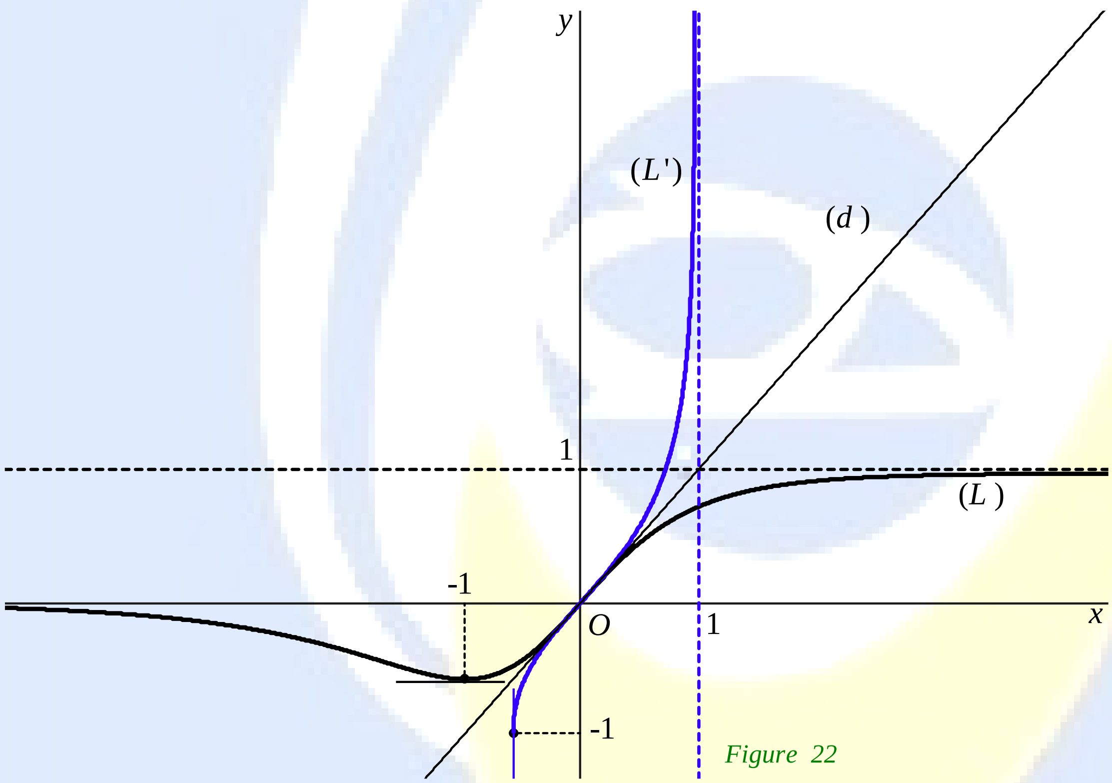


Figure 22

3- a) La restriction de h sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$ est continue et strictement croissante donc , il admit une fonction inverse h^{-1} définie par $h\left([-1\,;+\infty[\right)=[\dfrac{1}{1-e}\,;+\infty[$.

b) La courbe (L') de h^{-1} est la symétrique de (L) par rapport au droite (d) de l'équation $y=x$.
(L) passe par l'origine O et tangente à (d) en ce point ; Donc (L') passe par le symétrique de O et tangente à (d). donc (L) and (L') sont tangent à O. Trace (L') symétrie par rapport à (d) .

Exercise 6

A- (δ) et (Δ) sont des droites d'équations respectives $x=-4$ et $x-2y+2=0$.
Un point $M(x\ ;\ y)$ situé entre (δ) et l'axe $y'y$ si et seulement si $x\in[-4\ ;\ 0]$.

$MK = d(M\ ;\ (\Delta)) = \dfrac{|x-2y+2|}{\sqrt{5}}$; $MH = d(M\ ;\ y'y) = |x|$; $MH' = d(M\ ;\ (\delta)) = |x+4|$.

$M\in(C)$ si et seulement si M entre (δ) et $y'y$ et $5MK^2 = 3MH\times MH'$;

$x\in[-4\ ;\ 0]$ et $(x-2y+2)^2 = 3\left|x(x+4)\right|$; $(x-2y+2)^2 = -3x(x+4)$.

(C) est l'équation de la courbe $(x-2y+2)^2 = -3x(x+4)$

B- (C_1) est l'équation de la courbe $y=\dfrac{1}{2}\left(x+2+\sqrt{-3x^2-12x}\right)$.

1- Une équation de (C_2), le symétrique de (C_1) par rapport à ce point $I(-2\ ;\ 0)$ est

$$y=-\frac{1}{2}\left(-4-x+2+\sqrt{-3(-4-x)^2-12(-4-x)}\right)=\frac{1}{2}\left(x+2-\sqrt{-3x^2-12x}\right).$$

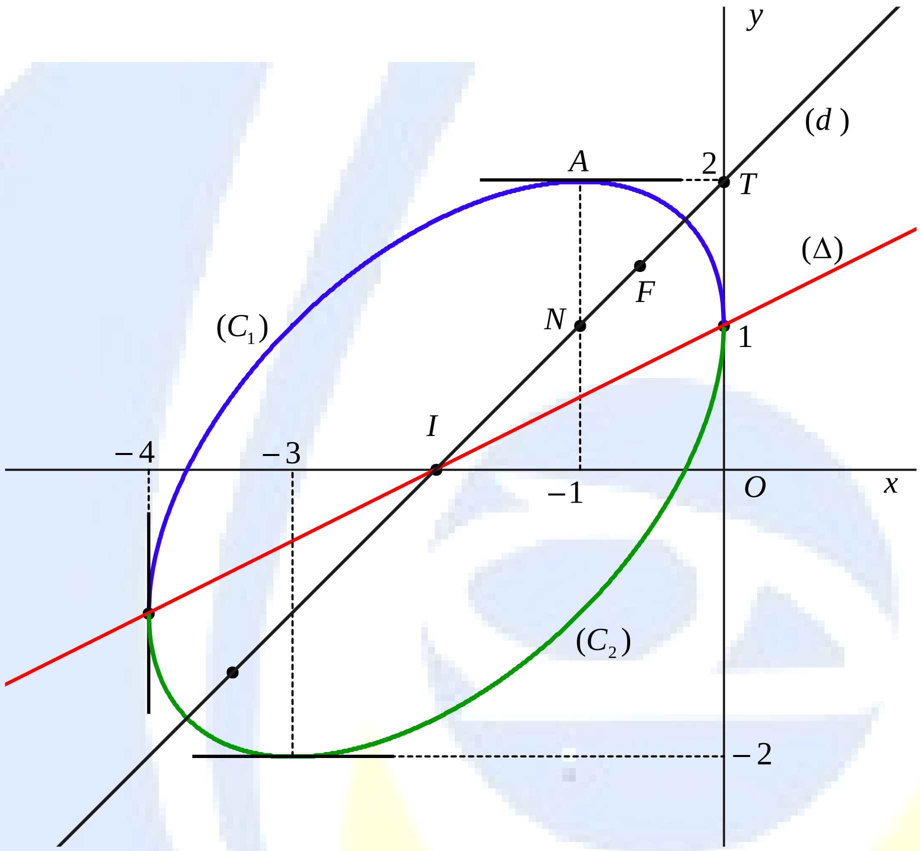
2- Une équation de $(C_1)\cup(C_2)$ est $y=\dfrac{1}{2}\left(x+2+\sqrt{-3x^2-12x}\right)$ *ou* $y=\dfrac{1}{2}\left(x+2+\sqrt{-3x^2-12x}\right)$;

$2y = x+2\pm\sqrt{-3x^2-12x}$; $2y-x-2=\pm\sqrt{-3x^2-12x}$; $(2y-x-2)^2 = -3x^2-12x$;

$(x-2y+2)^2 = -3x(x+4)$ est une équation de (C).

Donc $(C)=(C_1)\cup(C_2)$.

3- Trace (C)



C- 1- La relation complexe de r est $z' = e^{-i\frac{\pi}{4}} z$ qui est équivalente à $z = e^{i\frac{\pi}{4}} z'$;

$x + i\,y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' + i\,y')$; donc $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$ et $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$.

L'équation de (C) : $x^2 - xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

En substituant x et y, l'équation $x^2 - xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ devient

$\frac{1}{2}(x' - y')^2 - \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) + \frac{1}{2}(x' + y')^2 + 2\sqrt{2}(x' - y') - \sqrt{2}(x' + y') + 1 = 0$;

$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 + \sqrt{2}\,x' - 3\sqrt{2}\,y' + 1 = 0$; $x'^2 + 3y'^2 + 2\sqrt{2}\,x' - 6\sqrt{2}\,y' + 2 = 0$.

Donc, l'équation de (E) est $x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}\,x - 6\sqrt{2}\,y + 2 = 0$.

2- a) l'équation $x^2+3y^2+2\sqrt{2}\,x-6\sqrt{2}\,y+2=0$

$(x+\sqrt{2})^2-2+3\,(y-\sqrt{2})^2-6+2=0$; $(x+\sqrt{2})^2+3\,(y-\sqrt{2})^2=6$; $\dfrac{(x+\sqrt{2})^2}{6}+\dfrac{(y-\sqrt{2})^2}{2}=1$.

Donc (E) est une ellipse de $a=\sqrt{6}$ et $b=\sqrt{2}$; l'aire de (E) est $S=\pi ab$.
$S=\pi\sqrt{6}\times\sqrt{2}=2\sqrt{3}\pi$; $S=8\sqrt{3}\pi\quad cm^2$.

b) La rotation préserve la nature d'une conique et (E) est une ellipse alors (C) est aussi une ellipse.

Le point I est le centre de (C) alors (C) est formé de deux parties (C_1) and (C_2) symétriques par rapport à I.

L'aire de la rotation préserve (C) est égale à $8\sqrt{3}\pi\quad cm^2$.

L'aire de (C) est l'aire du domaine par (C_1) et (C_2) ; alors (C_1) est au-dessus (C_2)

$$S=\int_{-4}^{0}\frac{1}{2}\left(x+2+\sqrt{-3x^2-12x}-x-2+\sqrt{-3x^2-12x}\right)dx=\int_{-4}^{0}\sqrt{-3x^2-12x}\,dx\ .$$

Par consequence $\displaystyle\int_{-4}^{0}\sqrt{-3x^2-12x}\,dx=2\sqrt{3}\pi$.

c) L'axe focal de (E) est la droite de (δ) de l'équation $y=\sqrt{2}$; (C) est la droite (d) de l'image de rotation r est (δ).

La relation complexe de r est $z'=e^{-i\frac{\pi}{4}}z$; $x'+i\,y'=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(x+i\,y)$ alors $y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(y-x)$

Donc l'équation de (d) : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(y-x)=\sqrt{2}$, tel que $y=x+2$.

Pour l'ellipse (E) , $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{6-2}=2$ alors $F'(x'=2-\sqrt{2}\ ;\ y'=\sqrt{2})$.
Le point F tel que $r(F)=F'$ est un focal de (C) .

Les coordonnées de F : $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')=\sqrt{2}-2$ et $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')=\sqrt{2}$.

Ou La rotation préserve la distance , $IF=c=2$.
Donc le foyer de (C) sont les points dans (d) tel que $IF=2$;
$F(x\ ;\ x+2)$ et $IF^2=(x+2)^2+(x+2)^2=4$;
$(x+2)^2=2$; $x+2=\sqrt{2}$ or $x+2=-\sqrt{2}$.
le foyer de (C) sont les points $(-2+\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2})$ et $(-2-\sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{2})$