UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2016 - 2017 — ***Mathématiques (Bac Libanais)*** — ***Durée : 3 heures***

La distribution des notes est sur 50 — ***2 Juillet 2016***

I- (7 points) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.

Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$.

1- Soit M_1 et M_2 deux points distincts d'affixes respectives z_1 et z_2.

a) Montrer que , si M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses alors , leurs images par f , M_1' et M_2', sont aussi symétriques par rapport à l'axe des abscisses .

b) Montrer que , si M_1 et M_2 sont symétriques par rapport au point E d'affixe 2 alors , M_1' et M_2' sont confondus .

c) Déterminer l'image par f du point A d'affixe $z_A = -1+2i$. En déduire l'image par f de chacun des points B et C d'affixes respectives $z_B = -1-2i$ et $z_C = 5-2i$.

2- Vérifier que $z'+4 = (z-2)^2$.

3- Soit M un point, d'affixe z, appartenant au cercle (C) de centre E et de rayon 2 .

a) Justifier que $z = 2+2e^{i\theta}$ où θ est une mesure en radians d'un angle orienté.

b) Lorsque θ décrit l'intervalle $[0\,;\,\frac{\pi}{2}]$, déterminer et <u>tracer</u> les ensembles (γ) et (γ') de M et M' respectivement .

II- (7 points) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ell n\, x}{\sqrt{x}} - x + 1$.

1- Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 2 - 2x\sqrt{x} - \ell n\, x$.
Déterminer le sens de variations de g et calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$.

2- a) Justifier que f est dérivable et montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de f et déduire le signe de $f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

3- On considère la suite (U_n) de premier terme U_0 , $U_0 \in [1\,;\,2]$, telle que , pour tout n, $U_{n+1} = 1 + \dfrac{\ell n(U_n)}{\sqrt{U_n}}$.

a) Montrer que, pour tout x dans $[1\,;\,2]$, $0 \le \dfrac{\ell n\, x}{\sqrt{x}} \le 1$.

b) Démontrer, par récurrence sur n que, pour tout n dans IN , $U_n \in [1\,;\,2]$.

4- a) Vérifier que, pour tout n dans IN , $U_{n+1} - U_n = f(U_n)$ et déterminer le sens de variations de (U_n) .

b) Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

III- (10 points) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.

A tout point M d'affixe z, on associe les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^4.

1- Déterminer l'ensemble des valeurs de z telles que M, N et P soient 3 points distincts .

2- a) Lorsque les points M , N et P sont distincts , montrer que le triangle MNP est rectangle en N si et seulement si z^2+z est un imaginaire pur.

b) Montrer que l'ensemble (γ) des points $M(x\,;\,y)$ tels que le triangle MNP est rectangle en N est l'hyperbole (H) d'équation $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4}$ privée de deux points à déterminer.

3- a) Déterminer le centre I , le foyer F d'abscisse positive et l'excentricité de (H) .

b) Tracer (H) et préciser l'ensemble (γ). (***unité graphique : 2 cm***)

4- Soit $L(\alpha\,;\,\beta)$ un point variable de (H) autre que les sommets.

a) Ecrire une équation de la tangente (δ) et une équation de la normale (δ') à (H) en L.

b) Déterminer les points d'intersection E et E' de (δ) et (δ') avec l'axe focal de (H) et montrer que $\overline{IE}\times\overline{IE}'=IF^2$.

IV- (5 points) On dispose d'une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules bleues .

Un jeu consiste en deux étapes :

1- Dans la première étape, le joueur tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne. On considère les événements :
R_2 : " le joueur obtient seulement 2 boules rouges " et R_3 : " le joueur obtient 3 boules rouges " .
Montrer que $p(R_2)=0{,}5$ et calculer $p(R_3)$. En déduire la probabilité que le joueur tire au plus une boule rouge.

2- Si le joueur obtient au moins 2 boules rouges , il est qualifié pour la seconde étape du jeu qui consiste à tirer au hasard une boule parmi les sept boules restantes dans l'urne.

a) Calculer la probabilité que le joueur obtienne une boule rouge dans la seconde étape sachant qu'il a tiré 3 boules rouges dans la première étape du jeu.

b) Calculer la probabilité de l'événement R : " Le joueur obtient une boule rouge dans la seconde étape " .

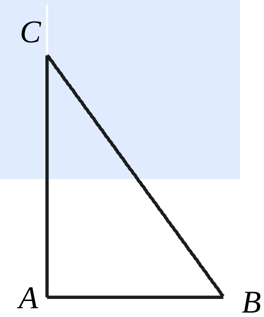
c) Calculer la probabilité que le joueur ait obtenu 2 boules rouges dans la première étape sachant qu'il a obtenu une boule rouge dans la seconde étape.

V- (8 points) Dans le plan orienté on considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\,)=\frac{\pi}{2}\quad(2\pi)$,

$AB=1$ et $AC=\lambda$ où λ est un nombre réel donné tel que $\lambda>1$.

Soit S la similitude qui transforme B en A et A en C .

1- Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S .



2- Soit I le centre de S.

a) Déterminer la nature et les éléments de $S \circ S$. En déduire que I appartient à $]BC[$.

b) Montrer que I appartient au cercle de diamètre $[AB]$ et placer I.

3- Soit D l'image de C par S.

a) Calculer CD en fonction de λ.

b) Montrer que les points A, I et D sont alignés .

c) Montrer que (CD) et (AB) sont parallèles . Construire D.

4- Soit E le projeté orthogonal de B sur (CD) et $F = S(E)$.

Décrire la construction de F et déterminer la nature du quadrilatéral $BFDE$.

VI- (13 points) On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = (3 + \ell n\, x)e^{-x}$.

1- Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x} - 3 - \ell n\, x$.

a) Calculer $h'(x)$ et montrer que $h'(1) = h(1)$.

b) Dresser le tableau de variations de h.

c) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $]0 ; +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]0{,}45 ; 0{,}46[$.

d) Déterminer le signe de $h(x)$.

2- Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

b) Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f(x) = 3e^{-x} + \dfrac{\ell n\, x}{x} \times \dfrac{x}{e^x}$ et déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Déterminer la fonction f', dérivée de f , et vérifier que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = h(x)e^{-x}$.

d) Dresser le tableau de variations de f .

3- a) Montrer que $f''(x) = (h'(x) - h(x))e^{-x}$.

b) Montrer que la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = h'(x) - h(x)$ s'annule une seule fois en changeant de signe.

c) En déduire que (C) admet un point d'inflexion à déterminer.

d) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha e^{\alpha}}$ et déterminer la valeur approchée de $f(\alpha)$ correspondant à $\alpha = 0{,}45$.

e) Déterminer le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Tracer (C) ***(unité graphique : 4 cm)***.

UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2016 - 2017 ***Solution de Mathématiques*** ***Durée : 3 heures***
La distribution des notes est sur 50 ***2 Juillet 2016***

Exercise 1

1- a) If M_1 and M_2 are symmetric with respect to the axis of abscissas $x'x$ then , $z_2 = \overline{z_1}$.

the affixes of the images M_1' and M_2' of M_1 and M_2 are $z_1' = z_1^{\,2} - 4z_1$ and $z_2' = z_2^{\,2} - 4z_2$.

$z_2' = \overline{z_1}^{\,2} - 4\overline{z_1} = \overline{z_1^{\,2} - 4z_1} = \overline{z_1'}$; therefore , M_1' and M_2' are also symmetric with respect to $x'x$.

b) If M_1 and M_2 are symmetric with respect to E with affix 2 then , $z_2 = 4 - z_1$.

$z_2' = z_2^{\,2} - 4z_2 = (4 - z_1)^2 - 4(4 - z_1) = z_1^{\,2} - 4z_1 = z_1'$; therefore , M_1' and M_2' are confounded .

c) A is the point with affix $z_A = -1 + 2i$; its image is the point A' with affix $z' = (-1+2i)^2 - 4(-1+2i) = 1 - 12i$.

$z_B = -1 - 2i = \overline{z_A}$ then , B is the symmetric of A with respect to $x'x$; therefore the image of B by f is the point B' symmetric of A' with respect to $x'x$ which is the point of affix $-1-12i$.

$z_C = 5 - 2i$, $z_A + z_C = 4 = 2z_E$ then , C is the symmetric of A with respect to E ; therefore $C' = A'$.

2- $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$.

3- a) If M belongs to (C) then $EM = 2$; therefore $|z - 2| = 2$.

If θ is an argument of $z - 2$ then , $z - 2 = 2e^{i\theta}$; that is $z = 2 + 2e^{i\theta}$.

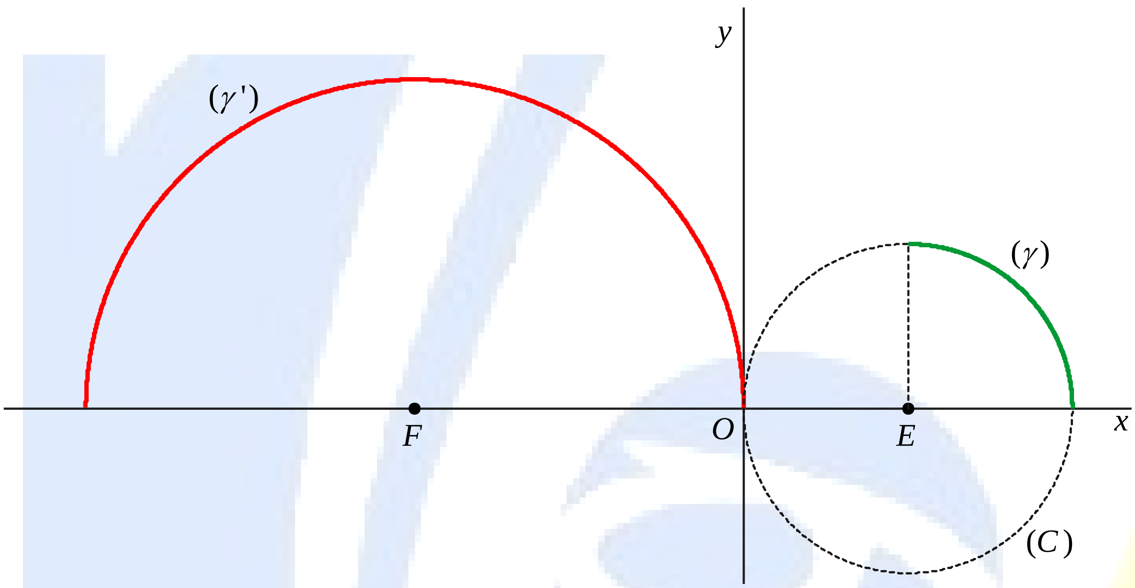
b) As θ traces the interval $[0\,;\frac{\pi}{2}]$, the set (γ) of M is the quarter of circle (C) corresponding to $x \geq 2$ and $y \geq 0$.

$z' + 4 = (z-2)^2$ then $|z' + 4| = 4$ and $\arg(z'+4) = 2\arg(z+2) = 2\theta$.

If F is the point with affix 4 then , $FM' = 4$ and $(\vec{u}\,;\overrightarrow{FM'}) = 2\theta$.

As θ traces the interval $[0\,;\frac{\pi}{2}]$, 2θ traces the interval $[0\,;\pi]$; therefore , the set (γ') of M' is the semi circle of center F and radius 4 lying above the axis of abscissas .

Drawing (γ) and (γ').



Exercise 2

1- The function g is defined on $]0\,;+\infty[$ by $g(x)=2-2x\sqrt{x}-\ell n\,x$.

$g'(x)=-3\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$; for all x in $]0\,;+\infty[$, $g'(x)<0$ then , g is strictly decreasing ; $g(1)=0$.

For all x in $]0\,;1[$, $g(x)>g(1)$; that is , $g(x)>0$;

For all x in $]1\,;+\infty[$, $g(x)<g(1)$; that is , $g(x)<0$.

2- a) Each of the functions $x\to x\sqrt{x}$ and $x\to \ell n\,x$ is differentiable on $]0\,;+\infty[$ then , f is differentiable .

$$f'(x)=\frac{2-\ell n\,x-2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}=\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$$ then , the sign of $f'(x)$ is that of $g(x)$ in $]0\,;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ell n\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-x+1\right)=-\infty\,.$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Table of variations of f

The function f has an absolute maximum equals 0

then , for all x in $]0\,;+\infty[-\{1\}$, $f(x)<0$.

3- a) For all x in $[1\,,\,2]$, $1 \le \sqrt{x} \le \sqrt{2}$ and $0 \le \ell n\, x \le 1$ then $0 \le \dfrac{1}{\sqrt{x}} \le 1$ and $0 \le \ell n\, x \le 1$; therefore

$0 \le \dfrac{\ell n\, x}{\sqrt{x}} \le 1$.

b) ▪ $U_0 \in [1\,;\,2]$.

▪ If , for a certain n , $U_n \in [1\,;\,2]$ then , $0 \le \dfrac{\ell n(U_n)}{\sqrt{U_n}} \le 1$; $1 \le 1 + \dfrac{\ell n(U_n)}{\sqrt{U_n}} \le 2$; that is $1 \le U_{n+1} \le 2$.

Therefore , for all n in IN , $U_n \in [1\,,\,2]$.

4- a) For all n in IN , $U_{n+1} - U_n = 1 - U_n + \dfrac{\ell n(U_n)}{\sqrt{U_n}} = f(U_n)$ and for all x in $[1\,;\,2]$, $f(x) \le 0$ then ,

for all n in IN , $U_{n+1} - U_n \le 0$ and (U_n) is a decreasing sequence .

b) (U_n) is decreasing and bounded then , it converges to a limit $\ell \in [1\,,\,2]$ such that $\ell = 1 + \dfrac{\ell n\,\ell}{\sqrt{\ell}}$.

Therefore $\dfrac{\ell n\,\ell}{\sqrt{\ell}} - \ell + 1 = 0$; $f(\ell) = 0$; $\ell = 1$.

Exercise 3

1- ▪ $M = N$ if and only if $z^2 = z$; that is $z = 0$ or $z = 1$.

▪ $N = P$ if and only if $z^4 = z^2$; that is $z^2 = 0$ or $z^2 = 1$; $z = 0$ or $z = 1$ or $z = -1$.

▪ $M = P$ if and only if $z^4 = z$; that is $z = 0$ or $z^3 = 1$; $z = 0$ or $z = 1$ or $z = j$ or $z = \bar{j}$.

Finally , the points M , N and P are distinct in pairs if and only if z a complex not belonging to the set $S = \left\{0\,;\,1\,;\,-1\,;\,j\,;\,\bar{j}\right\}$ where $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

2- a) If the points M , N and P are distinct in pairs , the triangle MNP is right at N if and only if $\dfrac{z^4 - z^2}{z - z^2}$ is a pure imaginary number ; that is $-\dfrac{(z^2 - z)(z^2 + z)}{z^2 - z}$ is a pure imaginary number ;
$z^2 + z$ is a pure imaginary number .

b) The triangle MNP is right at N if and only if $z \notin S$ and $z^2 + z$ is a pure imaginary number .

$z^2 + z = x^2 - y^2 + x + (2x+1)yi$

When $z \notin S$, $z^2 + z \ne 0$ then , $z^2 + z$ is a pure imaginary number if and only if

$x^2 - y^2 + x = 0$; $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \dfrac{1}{4}$.

The set (γ) of points $M(x\,;\,y)$ is the hyperbola (H) of equation $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}$ deprived from the points $O(0\,;\,0)$ and $A(-1\,;\,0)$, the points of (H) whose affixes belong to S.

3- a) For the hyperbola (H) :

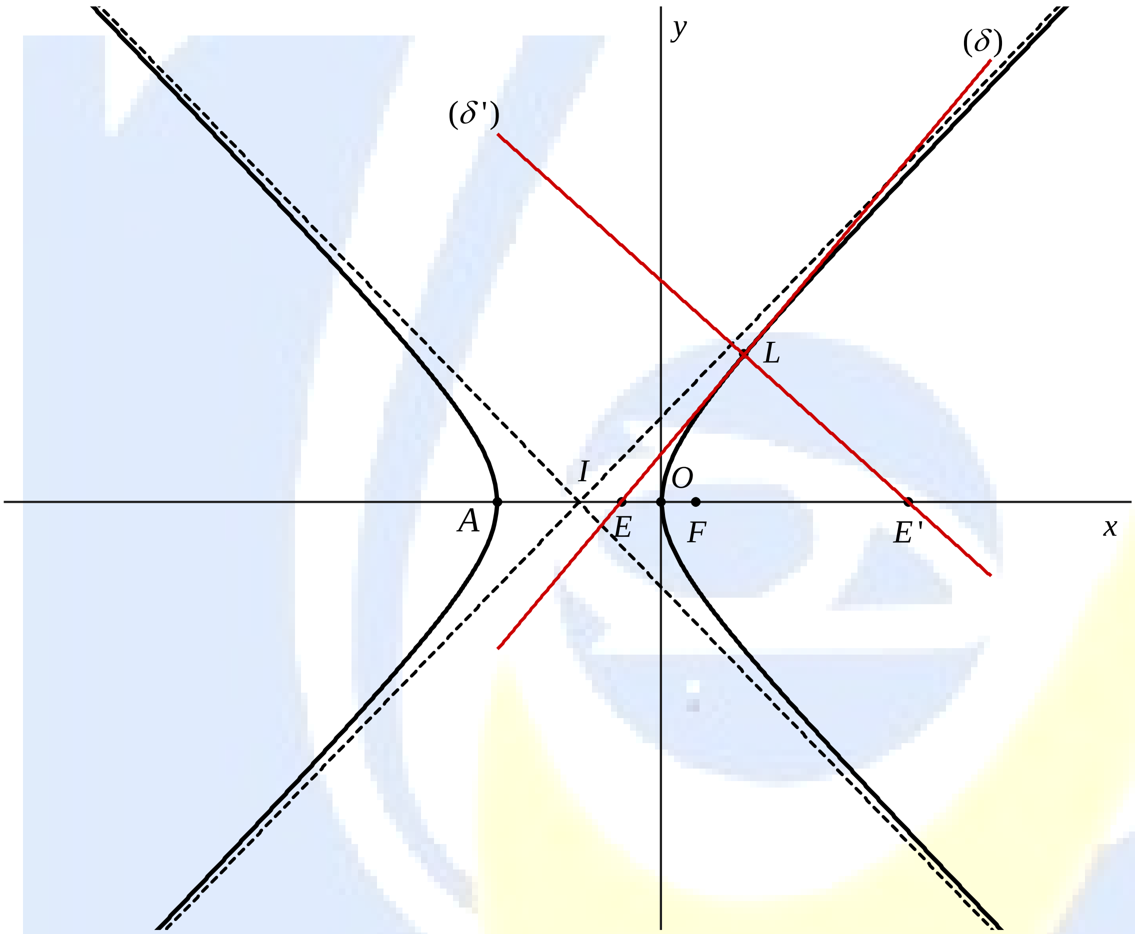
- The center is $I(-\frac{1}{2}\,;\,0)$;
- $a^2 = b^2 = \frac{1}{4}$ then (H) is a rectangular hyperbola with eccentricity is $e = \sqrt{2}$
- The focal axis is $x'x$ and $c = a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ then , the focus with positive abscissa is $F(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,0)$.

b) The vertices of (H) are $O(0\,;\,0)$ and $A(-1\,;\,0)$.

The asymptotes are the straight lines of equations $y = -x - \frac{1}{2}$ and $y = x + \frac{1}{2}$

Drawing (H). (***Graph unit : 2 cm***)

The set (γ) is the hyperbola (H) deprived from its vertices .



4- Let $L(\alpha\ ;\ \beta)$ be a variable point of (H) other than its vertices .

a) An equation of the tangent (δ) to (H) at L is $\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-\beta y=\frac{1}{4}$;

An equation of the normal (δ') to (H) at L is $\frac{1}{4}\times\frac{x+\frac{1}{2}}{\alpha+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\times\frac{y}{\beta}=c^2=\frac{1}{2}$.

b) (δ) and (δ') cut the focal axis $x'x$ at $E(\frac{1}{4\alpha+2}-\frac{1}{2}\,;0)$ and $E'(2\alpha+\frac{1}{2}\,;0)$.

$\overline{IE}=\frac{1}{4\alpha+2}$, $\overline{IE'}=2\alpha+1$ then , $\overline{IE}\times\overline{IE'}=\frac{1}{2}=IF^2$.

Exercise 4

The urn contains 10 balls then , there are ${}_{10}C_3$ equiprobable ways of selecting 3 balls from the urn .

1- There are 6 red and 4 blue balls in the urn then

$p(R_2)=\frac{{}_6C_2\times{}_4C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{60}{120}=0.5$ and $p(R_3)=\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$.

Let L be the event : " The player gets at most one red ball " .

$L=\overline{R_3\cup R_2}$ where R_2 and R_3 are incompatible ; therefore $p(L)=1-p(R_2)-p(R_3)=\frac{1}{3}$.

2- a) If 3 red balls are drawn in the first part of the game then , for the second part , the urn contains 3 red and 4 blue balls ; the required probability is $p_1=\frac{3}{7}$.

b) If 2 red balls are extracted in the first part of the game then , for the second part , the urn contains 4 red and 3 blue balls and $p_2=p(\textit{selecting one red ball from this urn})=\frac{4}{7}$.

Therefore , $p(R)=p(R_3)\times p_1+p(R_2)\times p_2=\frac{1}{6}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$.

c) The required probability is $p(R_2/R)=\frac{p(R_2\cap R)}{p(R)}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}\div\frac{5}{14}=\frac{4}{5}$.

Exercise 5

1- $S(B)=A$ and $S(A)=C$ then , the ratio of S is $\dfrac{AC}{AB}=\lambda$ and its angle is $(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{AC})=-\dfrac{\pi}{2}\quad(2\pi)$

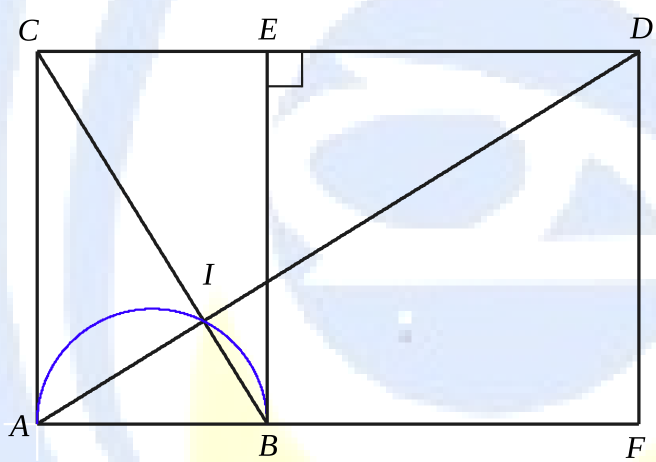
2- a) $S=S(I\ ;\ \lambda\ ;\ -\dfrac{\pi}{2})$ then , $S\circ S$ is the similitude of center I , ratio λ^2 and angle $-\pi$.

Therefore $S\circ S$ is the negative dilation of center I and ratio $-\lambda^2$.

$S\circ S(B)=S(S(B))=S(A)=C$ then , $\overrightarrow{IC}=-\lambda^2\,\overrightarrow{IB}$; therefore , I belongs to $]BC[$.

b) $S(B)=A$ then , $(\overrightarrow{IB}\ ;\ \overrightarrow{IA})=-\dfrac{\pi}{2}\quad(2\pi)$; therefore I belongs to the circle (γ) of diameter $[AB]$.

I is the point of intersection of the segment $]BC[$ and circle (γ) .



3- a) $S(C)=D$ and $S(A)=C$ then , $CD=\lambda\,AC=\lambda^2$.

b) $S\circ S(A)=S(S(A))=S(C)=D$ where $S\circ S$ is a dilation of center I then , A , I and D are collinear .

c) $S\circ S(A)=D$ and $S\circ S(B)=C$ where $S\circ S$ is a dilation then , (CD) and (AB) are parallel .

D is the point of intersection of (AI) and the parallel to (AB) passing through C .

4- E is the orthogonal projection of B on (CD) .

An angle of S is $-\dfrac{\pi}{2}$ then , any straight line and its image by S are perpendicular .

$S(C)=D$ then , $S((CE))$ is the perpendicular to (CE) at D which is the perpendicular to (AB) passing through D .

$S(B)=A$ then , $S((BE))$ is the perpendicular to (BE) passing though A which is (AB) .

Therefore F is the orthogonal projection of D on (AB) .

$BFDE$ is a rectangle for having 4 right angles .

Exercise 6

1- The function h is defined on $]0\,;+\infty[$ by $h(x)=\dfrac{1}{x}-3-\ell n\,x$.

a) $h'(x)=\dfrac{-1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$; $h'(1)=h(1)=-2$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=+\infty$ and $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$.

Table of variations of h.

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

c) The function h is continuous and strictly decreasing on $]0\,;+\infty[$ and 0 belongs to $h(]0\,;+\infty[)$ which is IR then , the equation $h(x)=0$ has a unique solution α in $]0\,;+\infty[$.

$h(0.45)\approx 0.02 > h(\alpha)=0 > h(0.46)\approx -0.05$ and h is strictly decreasing then , $\alpha\in]0.45\,;0.46[$.

d) h is strictly decreasing then :

for all $x<\alpha$, $h(x)>h(\alpha)$; $h(x)>0$ and for all $x>\alpha$, $h(x)<h(\alpha)$; $h(x)<0$.

2- a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

b) For all $x>0$, $f(x)=3e^{-x}+e^{-x}\ell n\,x=3e^{-x}+\dfrac{\ell n\,x}{x}\times\dfrac{x}{e^x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell n\,x}{x}=0$ and $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ then , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

c) $f'(x)=\dfrac{1}{x}e^{-x}-(3+\ell n\,x)e^{-x}=h(x)e^{-x}$.

d) The sign of $f'(x)$ is that of $h(x)$.

Table of variations of f .

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3- a) $f'(x)=h(x)e^{-x}$ then , $f''(x)=h'(x)e^{-x}-h(x)e^{-x}$

$f''(x)=\big(h'(x)-h(x)\big)e^{-x}$.

b) $g(x)=h'(x)-h(x)=\dfrac{-1}{x^2}-\dfrac{2}{x}+3+\ell n\,x$.

$g'(x)=\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}$; for all $x>0$, $g'(x)>0$ then , g is strictly increasing .

The function g is continuous , strictly increasing and $g(1)=h'(1)-h(1)=0$ then , $g(x)$ changes sign at 1 from negative to positive .

c) $f''(x) = g(x)e^{-x}$ then , the sign of $f''(x)$ which is that of $g(x)$, changes also at 1 ; therefore , the point $I(1\,;\,3e^{-1})$ is the point of inflection of (C) .

d) $f(\alpha) = (3 + \ell n\alpha)e^{-\alpha}$ with $\ell n\alpha = \dfrac{1}{\alpha} - 3$ then , $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha e^{\alpha}}$.

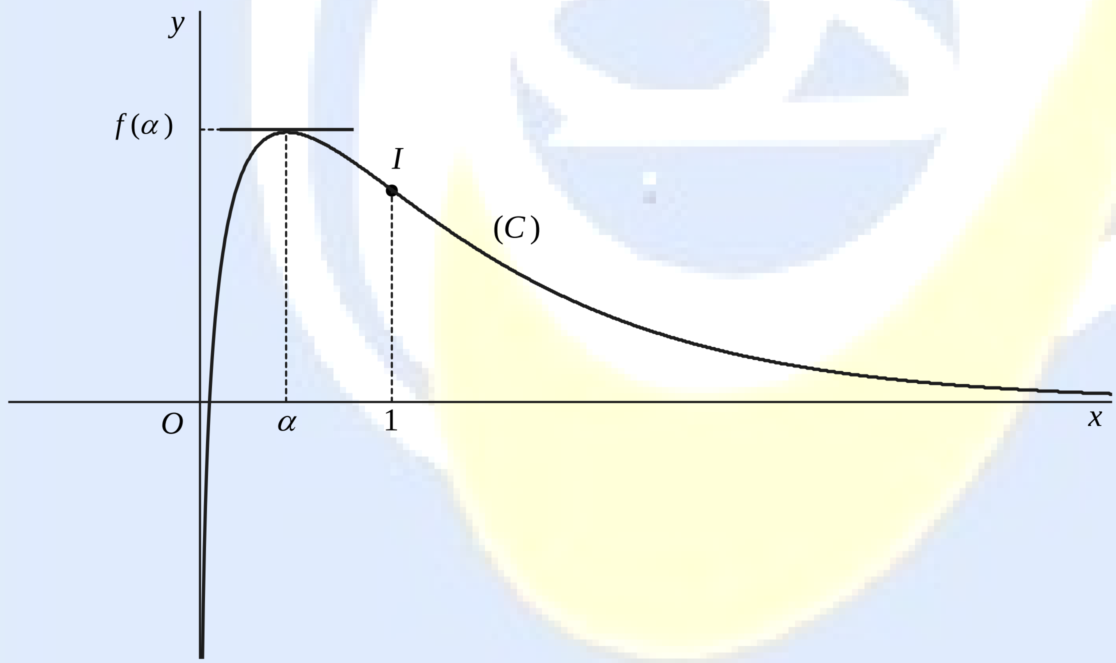
For $\alpha = 0.45$, $f(\alpha) \approx 1.42$.

e) $f(x) = 0$ is equivalent to $\ell n x = -3$; $x = e^{-3}$.

(C) cuts the axis of abscissas at the point $(e^{-3}\,;\,0)$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ and $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ then , the asymptotes of (C) are the axes of coordinates .

Drawing (C) in an orthonormal system . (***Unit : 4 cm***)



Concours d'entrée 2016 - 2017 | ***Mathématiques*** | ***Durée : 3 heures***
La distribution des notes est sur 50 | ***(Programme : Bac Français)*** | ***2 Juillet 2016***

Exercice 1 (7 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$.

Soit f l'application qui , à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$.

1- Soit M_1 et M_2 deux points distincts d'affixes respectives z_1 et z_2 .

a) Montrer que, si M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses alors, leurs images par f , M_1' et M_2', sont aussi symétriques par rapport à l'axe des abscisses .

b) Montrer que, si M_1 et M_2 sont symétriques par rapport au point E d'affixe 2 alors, M_1' et M_2' sont confondus.

c) Déterminer l'image par f du point A d'affixe $z_A = -1+2i$. En déduire l'image par f de chacun des points B et C d'affixes respectives $z_B = -1-2i$ et $z_C = 5-2i$.

2- Vérifier que $z'+4 = (z-2)^2$.

3- Soit M un point , d'affixe z , appartenant au cercle (C) de centre E et de rayon 2 .

a) Justifier que $z = 2+2e^{i\theta}$ où θ est une mesure en radians d'un angle orienté.

b) Lorsque θ décrit l'intervalle $[\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,]$, déterminer et <u>tracer</u> les ensembles (γ) et (γ') de M et M' respectivement.

Exercice 2 (7 points)

On dispose d'une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules bleues.
Un jeu consiste en deux étapes :

1- Dans la première étape, le joueur tire au hasard et simultanément 3 boules dans l'urne.
On considère les événements :
R_2 : " Le joueur obtient seulement 2 boules rouges " et R_3 : " le joueur obtient 3 boules rouges ".
Montrer que $p(R_2) = 0{,}5$ et calculer $p(R_3)$. En déduire la probabilité que le joueur tire au plus une boule rouge.

2- Si le joueur obtient au moins 2 boules rouges, il est qualifié pour la seconde étape du jeu qui consiste à tirer au hasard une boule parmi les sept boules restantes dans l'urne.

a) Calculer la probabilité que le joueur obtienne une boule rouge dans la seconde étape sachant qu'il a tiré 3 boules rouges dans la première étape du jeu.

b) Calculer la probabilité de l'événement R : " Le joueur obtient une boule rouge dans la seconde étape ".

c) Calculer la probabilité que le joueur ait obtenu 2 boules rouges dans la première étape sachant qu'il a obtenu une boule rouge dans la seconde étape.

3- Si le joueur n'est pas qualifié pour la seconde étape du jeu il perd 10 000 LL.
Si le joueur est qualifié pour la seconde étape du jeu il gagne 5 000 LL s'il tire une boule bleue et 15 000 LL s'il tire une boule rouge dans la seconde étape.
Soit X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur dans le jeu considéré.
Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

Exercice 3 **(7 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points $A(2\,;-9\,;\,2)$, $B(4\,;-6\,;\,4)$, $S(6\,;\,5\,;\,4)$ et la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t+2 \\ y = t+8 \\ z = -2t+6 \end{cases}\; ; t \in R$.

1- Montrer que les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires.

2- Soit (P) le plan contenant (AB) et parallèle à (d).
Montrer que $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P) et déterminer une équation cartésienne de (P).

3- On considère le point L de paramètre t sur la droite (d).
a) Déterminer la valeur de t pour laquelle L est le projeté orthogonal du point S sur (d).
b) Montrer que le point $H(10\,;1\,;\,6)$ est le projeté orthogonal de S sur (P) .
c) Le point S est-il équidistant de (d) et (P) ?

Exercice 4 **(10 points)**

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x - \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1- a) Vérifier que $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{e^{2x}+1} = x + 1 - \dfrac{2}{e^{-2x}+1}$.
En déduire les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
Déterminer les équations des asymptotes de (C).

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

2- a) x étant un réel donné, justifier l'existence de l'intégrale $\int_x^{x+1} f(t)\,dt$.

Soit φ la fonction définie sur R par $\varphi(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt$.

Démontrer que φ est dérivable sur R et que $\varphi'(x) = f(x+1) - f(x)$.

En déduire le sens de variations de φ.

b) Trouver une primitive de f sur R et en déduire $\varphi(x)$.

c) Calculer $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Exercice 5 **(8 points)**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ell n\, x}{\sqrt{x}} - x + 1$.

1- Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 2 - 2x\sqrt{x} - \ell n\, x$.

Déterminer le sens de variations de g et calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$.

2- a) Justifier que f est dérivable et montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de f et déduire le signe de $f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

3- On considère la suite (U_n) de premier terme U_0 , $U_0 \in [1\,;2]$, telle que , pour tout entier naturel n ,

$$U_{n+1} = 1 + \frac{\ell n(U_n)}{\sqrt{U_n}} \ .$$

a) Montrer que, pour tout réel x de $[1\,;2]$, $0 \le \dfrac{\ell n\, x}{\sqrt{x}} \le 1$.

b) Démontrer, par récurrence sur n que, pour tout n dans IN, $U_n \in [1\,;2]$.

4- a) Vérifier que, pour tout n dans IN, $U_{n+1} - U_n = f(U_n)$ et déterminer le sens de variations de (U_n).

b) Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite .

Exercice 6 **(11 points)**

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \sin(\pi x)$.

1- a) Dresser le tableau de variations de f .

b) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé (***unité graphique** : **8 cm***)

c) Calculer $I=\int_0^1 f(x)\,dx$ et interpréter géométriquement cette intégrale.

2- Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose : $S_n=\frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots\cdots\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$

a) Interpréter graphiquement S_n, en introduisant les rectangles de base $\left[\frac{k}{n}\,;\,\frac{k+1}{n}\right]$ et de hauteur $f\left(\frac{k}{n}\right)$, où k est un entier naturel tel que $0\leq k\leq n-1$. Faire la figure dans le même repère lorsque $n=8$.

b) Montrer que : $1+e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{2\pi}{n}}+e^{i\frac{3\pi}{n}}+\cdots\cdots\cdots+e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}=\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$.

c) En déduire que $\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots\cdots\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.

d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{2}{\pi}$.

3- Comparer les résultats des questions 1) et 2) et interpréter graphiquement.

Concours d'entrée 2016 - 2017 *Solution de Mathématiques* *Durée : 3 heures*
La distribution des notes est sur 50 *(Programme : Bac Français)* *2 Juillet 2016*

Exercice 1

L'application f associe a tout point M d'affixe z, le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$.
M_1 et M_2 sont deux points distincts d'affixes z_1 et z_2.

1- a) Si M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses alors , $z_2 = \overline{z_1}$.

Les affixes des images M_1'et M_2'de M_1 et M_2 sont $z_1' = z_1^2 - 4z_1$ et $z_2' = z_2^2 - 4z_2$.

$z_2' = \overline{z_1}^2 - 4\overline{z_1} = \overline{z_1^2 - 4z_1} = \overline{z_1'}$; alors , M_1' et M_2' sont symétriques par rapport à l'axe $x'x$.

b) If M_1 and M_2 sont symétriques par rapport au point E d'affixe 2 alors , $z_2 = 4 - z_1$.

$z_2' = z_2^2 - 4z_2 = (4 - z_1)^2 - 4(4 - z_1) = z_1^2 - 4z_1 = z_1'$; alors , M_1' et M_2' sont confondus .

c) A est le point d'affixe $z_A = -1 + 2i$; son image est le point A' d'affixe $z' = (-1+2i)^2 - 4(-1+2i) = 1 - 12i$.

$z_B = -1 - 2i = \overline{z_A}$ alors , B est le symétrique de A par rapport à $x'x$; par suite l'image de B par f est le point B' symétrique de A' par rapport à $x'x$ qui est le point d'affixe $-1 - 12i$.

$z_C = 5 - 2i$, $z_A + z_C = 4 = 2z_E$ alors , C est le symétrique de A par rapport à E ; par suite $C' = A'$.

2- a) F est le point d'affixe $z_F = 2^2 - 4 \times 2 = -4$.

b) $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$.

3- Soit M un point , d'affixe z , appartenant au cercle (C) de centre E et de rayon 2 .

a) Si M appartient à (C) alors , $EM = 2$; par suite $|z - 2| = 2$.

Si θ est un argument de $z - 2$ alors , $z - 2 = 2e^{i\theta}$; soit $z = 2 + 2e^{i\theta}$.

b) Lorsque θ décrit l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, l'ensemble (γ) de M est le quart du cercle (C) correspondant à $x \geq 2$ et $y \geq 0$.

$z' + 4 = (z-2)^2$ alors , $|z' + 4| = 4$ et $\arg(z'+4) = 2\arg(z+2) = 2\theta$; soit $FM' = 4$ et $(\vec{u} ; \overrightarrow{FM'}) = 2\theta$.

Lorsque θ décrit l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, 2θ décrit l'intervalle $[0 ; \pi]$; par suite , l'ensemble (γ') de M' est le demi cercle de centre F et de rayon 4 situé au dessus de l'axe des abscisses .

Tracé de (γ) et (γ') .

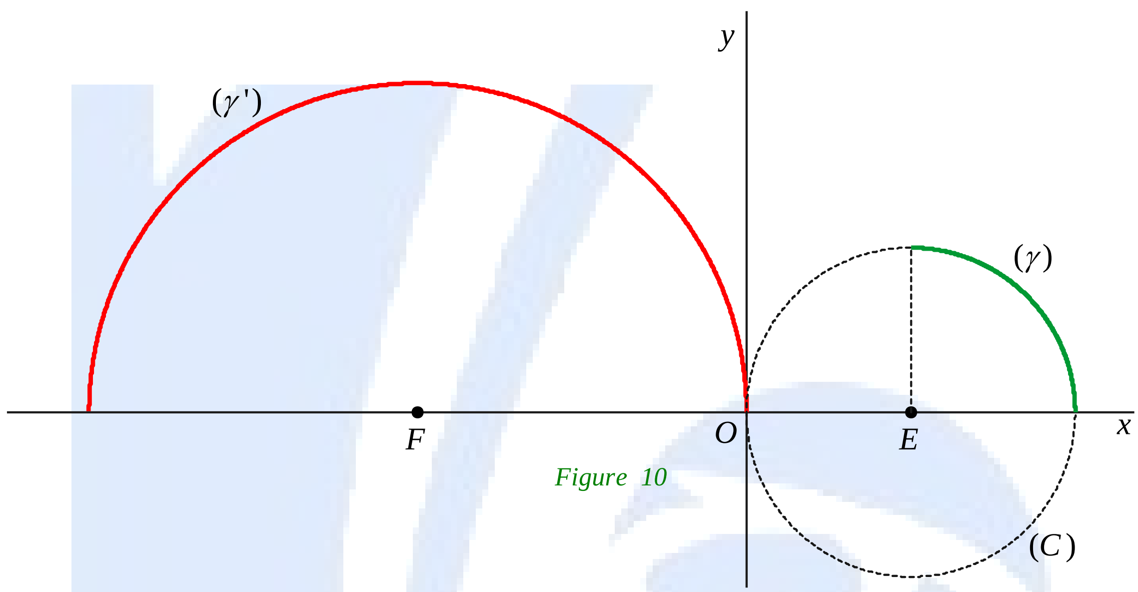


Figure 10

Exercice 2

L'urne contient 10 boules alors , il y a ${}_{10}C_3$ cas équiprobable de tirer 3 boules dans l'urne .

1- Il y a 6 boules rouges et 4 boules bleues dans l'urne alors ,

$$p(R_2) = \frac{{}_6C_2 \times {}_4C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{60}{120} = 0.5 \text{ et } p(R_3) = \frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

Soit L l'événement : " le joueur tire au plus une boule rouge " .

$L = \overline{R_3 \cup R_2}$ où R_2 et R_3 sont incompatibles alors , $p(L) = 1 - p(R_2) - p(R_3) = \frac{1}{3}$.

2- a) Si 3 boules rouges sont tirées dans la première étape du jeu alors , pour la seconde étape , l'urne contient 3 boules rouges et 4 boules bleues ; la probabilité demandée est $p_1 = \frac{3}{7}$.

b) Si 3 boules rouges sont tirées dans la première étape du jeu alors , pour la seconde étape , l'urne contient 4 boules rouges et 3 boules bleues ; par suite $p_2 = p(\textit{selecting one red ball from this urn}) = \frac{4}{7}$.

Par suite , $p(R) = p(R_3) \times p_1 + p(R_2) \times p_2 = \frac{1}{6} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$.

c) La probabilité demandée est $p(R_2 / R) = \frac{p(R_2 \cap R)}{p(R)} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} \div \frac{5}{14} = \frac{4}{5}$.

3- Les 3 valeurs possibles de X sont $-10\,000$ LL , $+5\,000$ LL and $+15\,000$.

$p(X=-10\,000)=p(L)=\dfrac{1}{3}$, $p(X=15\,000)=p(R)=\dfrac{5}{14}$ alors , $p(X=5\,000)=1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{14}=\dfrac{13}{42}$.

L'espérance mathématique de X est $\overline{X}=-10\,000\times\dfrac{1}{3}+5\,000\times\dfrac{13}{42}+15\,000\times\dfrac{5}{14}=\dfrac{25\,000}{7}$ LL .

Exercice 3

1- La fonction g est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=2-2x\sqrt{x}-\ell n\,x$.

$g'(x)=-3\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$; pour tout x dans $]0\,;+\infty[$, $g'(x)<0$ alors , g est strictement décroissante ; $g(1)=0$.

Pour tout x dans $]0\,;1[$, $g(x)>g(1)$; soit $g(x)>0$;

Pour tout x dans $]1\,;+\infty[$, $g(x)<g(1)$; soit $g(x)<0$.

2- a) Chacune des fonctions $x\to x\sqrt{x}$ et $x\to \ell n\,x$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ alors , f est dérivable .

$f'(x)=\dfrac{2-\ell n\,x-2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}=\dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ alors , le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ dans $]0\,;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\ell n\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-x+1\right)=-\infty$.

Tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Figure 23

La fonction f a un maximum absolu égale à 0

alors , pour tout x dans $]0\,;+\infty[-\{1\}$, $f(x)<0$.

3- a) Pour tout x dans $[1\,,2]$, $1\le\sqrt{x}\le\sqrt{2}$ et $0\le\ell n\,x\le 1$ alors , $0\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}\le 1$ et $0\le\ell n\,x\le 1$; par suite

$0\le\dfrac{\ell n\,x}{\sqrt{x}}\le 1$.

b) ▪ $U_0\in[1\,;2]$.

▪ Si , pour un certain n , $U_n\in[1\,;2]$ alors , $0\le\dfrac{\ell n(U_n)}{\sqrt{U_n}}\le 1$; $1\le 1+\dfrac{\ell n(U_n)}{\sqrt{U_n}}\le 2$; soit $1\le U_{n+1}\le 2$.

Par suite , for all n in IN , $U_n\in[1\,,2]$.

4- a) Pour tout n dans IN , $U_{n+1} - U_n = 1 - U_n + \dfrac{\ell n(U_n)}{\sqrt{U_n}} = f(U_n)$ et pour tout x dans $[1\,;\,2]$, $f(x) \leq 0$

alors , pour tout n dans IN , $U_{n+1} - U_n \leq 0$ et (U_n) est une suite décroissante .

b) (U_n) est décroissante et bornée alors , elle converge vers une limite $\ell \in [1\,,\,2]$ telle que $\ell = 1 + \dfrac{\ell n \ell}{\sqrt{\ell}}$.

$\dfrac{\ell n \ell}{\sqrt{\ell}} - \ell + 1 = 0$; soit $f(\ell) = 0$; $\ell = 1$.

Exercice 4

1- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$, alors $\begin{cases} x = 2m+2 \\ y = 3m-9 \\ z = 2m+2 \end{cases}$; $m \in IR$ est une représentation paramétrique de la droite (AB) .

Le system $\begin{cases} 2t+2 = 2m+2 \\ t+8 = 3m-9 \\ -2t+6 = 2m+2 \end{cases}$ est impossible donc les droites (AB) et (d) ne se coupent pas .

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) tel que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires .

Alors les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires .

2- Le plan (P) est dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P) si et seulement si $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{v} = 0$ d'où

$2a + b - 2c = 0$ et $2a + 3b + 2c = 0$. Une solution de ce système est $(a = 2;\ b = -2\ ;\ c = 1)$ donc $2x - 2y + z + d = 0$ est une équation cartésienne de (P) avec $d = -24$ puisque A appartient à (P).

Enfin , $2x - 2y + z - 24 = 0$ est une équation cartésienne de (P) .

3- a) Le point $L(\,2t+2\ ;\ t+8\ ;\ -2t+6)$ de la droite (d) est le projeté orthogonal du point S sur (d) si et seulement si $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{SL} = 0$. D'où $2(2t-4) + (t+3) - 2(-2t+2) = 0$ et $t = 1$. Par suite , $L(\,4\ ;\ 9\ ;\ 4)$.

b) $2(10) - 2(1) + 6 - 24 = 0$ alors H appartient à (P) ;

$\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{SH}=2\,\vec{v}$ par suite $\overrightarrow{SH}$ est orthogonal à (P);

Donc la droite (SH) est orthogonale à (P) en H , par suite , H est le projeté orthogonal de S sur (P) .

c) La distance de S à (P) est $SH=\sqrt{36}=6$ alors que la distance de S à (d) est $SL=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$.
Les deux distances étant différentes donc S n'est pas équidistant de (d) et (P).

<u>Exercice 5</u>

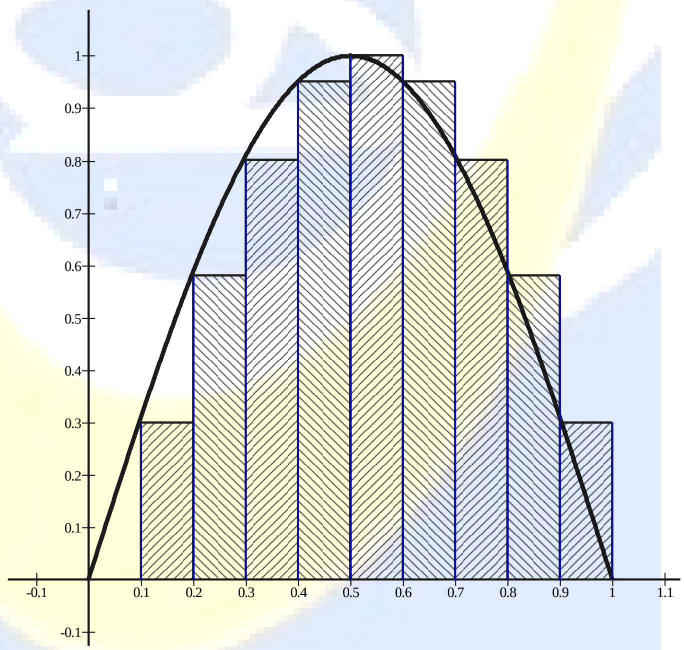
1- a) f est la composée de deux fonctions dérivables sur [0 ;1] ; donc f est dérivable sur [0 ;1] .
$f'(x)=\pi\cos\pi x$.

Si $0\le x<\frac{1}{2}$, alors $0\le \pi x<\frac{\pi}{2}$, donc $f'(x)>0$;

Si $\frac{1}{2}<x\le 1$, alors $\frac{\pi}{2}<\pi x\le\pi$, donc $f'(x)<0$.

Tableau de variations de f

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



b) La courbe C .

c) $I=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$.

Interprétation graphique :
Comme $f(x)\ge 0$ sur [0 ;1] , I est égale , en unités d'aire, à l'aire du domaine sous la courbe .

2- a) Le produit $\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k}{n}\right)$ est égal à l'aire du rectangle R_k ; S_n est donc la somme des aires des rectangles obtenus en faisant varier k de 0 à $n-1$.

b) $1+e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{2\pi}{n}}+...+e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}$ est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{i\frac{\pi}{n}}$; par suite $1+e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{2\pi}{n}}+...+e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}=1\times\dfrac{1-e^{i\frac{n\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}=\dfrac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$.

c) $$\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}=\frac{2}{1-\cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{2}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}-2i\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}\left(\sin\frac{\pi}{2n}-i\cos\frac{\pi}{2n}\right)}=\frac{\sin\frac{\pi}{2n}+i\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

$$\operatorname{Im}\left(1+e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{2\pi}{n}}+...+e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}\right)=\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\operatorname{Im}\left(\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}\right)=\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

d) $$S_n=\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{\pi(n-1)}{n}\right)=\frac{1}{n}\times\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{2}{\pi}\times\frac{t}{\sin t}\times\cos t \text{ avec } t=\frac{\pi}{2n}.$$

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2}{\pi}\times\dfrac{t}{\sin t}\times\cos t=\dfrac{2}{\pi}$ car $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$ et $\lim\limits_{t\to 0}\cos t=1$.

3- L'aire sous la courbe est égale à la somme des aires des rectangles, lorsque le nombre des rectangles devient très grand.

Exercice 6

$$f(x)=x-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

1- a) $f(x)=x-\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=x-\dfrac{e^{2x}+1-2}{e^{2x}+1}=x-1+\dfrac{2}{e^{2x}+1}$;

$$f(x)=x-\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=x+\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}=x+\frac{e^{-2x}+1-2}{e^{-2x}+1}=x+1-\frac{2}{e^{-2x}+1}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\dfrac{2}{e^{2x}+1}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^{2x}+1}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1-\dfrac{2}{e^{-2x}+1}\right)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-2x}+1}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^{2x}+1}=0$, alors la droite D : $y = x$-1 est asymptote à C en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-2x}+1}=0$, alors la droite D' : $y = x$+1 est asymptote à C en $-\infty$.

b) $f\,'(x)=\dfrac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}\geq 0$; f est strictement croissante sur R

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de *f'*	$+$	0	$+$
Variations de *f*	$-\infty$	0	$+\infty$

2- a) f est continue sur R , elle admet donc une primitive sur R , et par conséquent l'intégrale $\int_x^{x+1} f(t)\,dt$ existe .

$\varphi(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt=\int_x^{1} f(t)\,dt+\int_1^{x+1} f(t)\,dt$ (relation de Chasles) . Donc $\varphi(x)=\int_1^{x+1} f(t)\,dt-\int_1^{x} f(t)\,dt$

Or $\int_a^{x} f(t)\,dt$ est dérivable et elle est la primitive de f qui s'annule en $x=a$ (théorème) , alors φ est dérivable sur R et $\varphi'(x)=f(x+1)\times(x+1)'-f(x)=f(x+1)-f(x)$

Comme f est croissante sur R, $f(x+1)-f(x)\geq 0$, alors φ est croissante sur R .

b) $f(x)=x-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=x-\dfrac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)'}{e^{x}+e^{-x}}$, alors $F(x)=\dfrac{x^{2}}{2}-\ell n\left(e^{x}+e^{-x}\right)$

D'où $\varphi(x)=F(x+1)-F(x)=\dfrac{2x+1}{2}-\ell n\left(\dfrac{e^{x+1}+e^{-x-1}}{e^{x}+e^{-x}}\right)$.

c) $\varphi\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0-\ell n\left(\dfrac{e^{0,5}+e^{-0,5}}{e^{-0,5}+e^{0,5}}\right)=0$.

On pouvait prévoir ce résultat car $\varphi\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\int_{-0,5}^{0,5} f(t)\,dt=0$, f étant une fonction impaire.