UNIVERSITE LIBANAISE

FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2010 - 2011 **Mathématiques** **Durée : 3 heures**
03 juillet 2010

La distribution des notes est sur 25

I- (1.5 pt) On considère les trois nombres complexes $a = 1 + i$, $b = 3 + 2i$ et $c = 1 + 5i$.

Montrer que $\dfrac{c}{b} = a$. En déduire que $\arctan 5 - \arctan \dfrac{2}{3} = \dfrac{\pi}{4}$.

II- (1.5 pt) Un sac contient trois jetons A, B et C tels que :
A a deux faces rouges , B a deux faces blanches et C a une face rouge et une face blanche .
On tire au hasard un jeton du sac et on le jette sur une table .
Sachant que la face visible est rouge , calculer la probabilité que la seconde face soit aussi rouge .

III- (4 pts) On considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies pour $n \geq 1$ par $U_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $V_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

1- Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = x - \ell n(1 + x)$.

a) Dresser le tableau de variations de g . En déduire que , pour tout $x > 0$, $\ell n(1 + x) < x$.

b) Calculer $\ell n(U_n)$ et montrer que , pour tout $n \geq 1$, $U_n < e$.

2- Soit h la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ell n(1 + x)$

a) Dresser le tableau de variations de h . En déduire que , pour tout $x > 0$, $\ell n(1 + x) > \dfrac{x}{1+x}$.

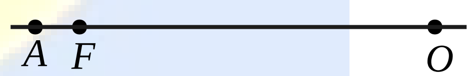
b) Calculer $\ell n(V_n)$ et montrer que , pour tout $n \geq 1$, $V_n > e$.

3- a) Montrer que , pour tout $n \geq 1$, $V_n - U_n = \dfrac{1}{n} U_n$. En déduire que , pour tout $n \geq 1$, $V_n - U_n < \dfrac{e}{n}$.

b) Montrer que , pour tout $n \geq 1$, $0 < e - U_n < V_n - U_n$.

c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

IV- (5 pts) On donne 3 points alignés A, F et O tels que $AF = 1$ et $FO = 8$. Soit (ω) un cercle variable tangent en A à (OA).



Les tangentes à (ω) , autres que (OA) , issues de O et de F se coupent en L .

1- Montrer que , lorsque (ω) varie , L varie sur une ellipse (E) que l'on déterminera .

2- Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ tel que $\overrightarrow{OF} = -8\,\vec{i}$.

a) Montrer que $\dfrac{(x+4)^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ est une équation de (E) .

b) Sachant que O est un foyer de (E), déterminer une équation de la directrice associée (d).

3- a) Déterminer les points d'intersection P et Q de (E) avec l'axe des ordonnées . Tracer (E) .

b) P étant le point d'ordonnée positive , la tangente (Δ) en P à (E) coupe l'axe non focal de (E) en T . Montrer que T appartient au cercle principal de (E).

4- Soit $S(x_0\,;\,y_0)$ un point de (E) tel que $y_0 \neq 0$.

a) Montrer que la tangente (δ) en S à (E) coupe la directrice (d) en un point L d'ordonnée $-\dfrac{9\,x_0}{4\,y_0}$.

b) La droite (OS) recoupe (E) en un point S'. Montrer que la tangente (δ') en S' à (E) coupe la directrice (d) au même point L .

V- (6 pts) On Considère dans un plan orienté une droite (d) et un point O n'appartenant pas à (d).

On Considère sur (d), 3 points A , C et E tels que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CE}$ et on construit les triangles rectangles isocèles OAB , OCD et OEF tels que $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OC}\,;\,\overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OE}\,;\,\overrightarrow{OF}) = \dfrac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$.

Soit I, J et K les milieux de $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$ respectivement .

1- Montrer que les 3 points B, D et F sont alignés sur une droite (d_1) perpendiculaire à (d).

2- Déterminer le rapport et un angle de la similitude S de center O telle que $S(A) = I$.

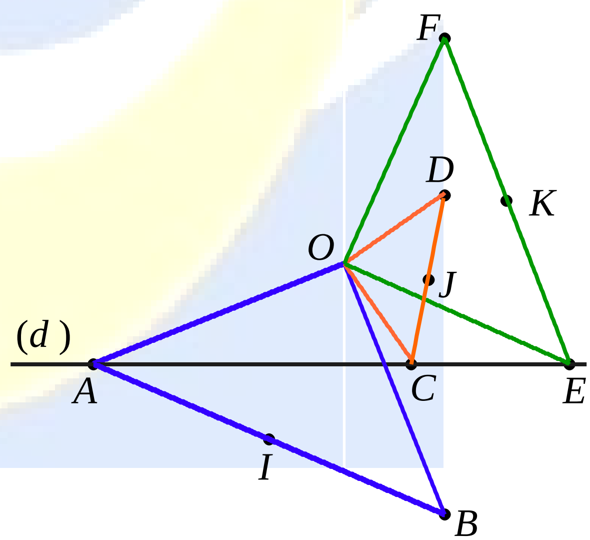
3- Déterminer $S(C)$ et $S(E)$.

4- Montrer que I , J et K sont alignés sur une droite (d_2) et calculer $\dfrac{IJ}{JK}$.

5- Montrer que les centres de gravité des triangles OAB, OCD et OEF sont aussi alignés sur une droite (d_3) parallèle à (d_2) .

6- On rapporte le plan au système orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$ tel que $A(-5\,;-2)$ et $C(1\,;-2)$.

a) Déterminer les coordonnées de E .



b) Déterminer l'expression complexe de S .
c) Déterminer les coordonnées de chacun des points I , J et K , et vérifier que ces points sont alignés.
d) Déterminer les coordonnées de chacun des points B , D et F , et vérifier que ces points sont alignés .

VI- (7 pts) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $K=[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}]$ par $f(x)=e^{x}\cos x$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un système orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

1- a) Montrer que $f'(x)=\sqrt{2}\;e^{x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ et résoudre l'équation $f'(x)=0$ dans l'intervalle K .

b) Montrer que f est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{4}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}]$.

c) Dresser le tableau de variations de f . Vérifier que $f(\frac{\pi}{4})\approx 1,55$.

2- a) Vérifier que $f'(x)=\sqrt{2}\;e^{-\frac{\pi}{4}}f(x+\frac{\pi}{4})$ et montrer que $f''(x)=-2e^{x}\sin x$.

b) Etudier la concavité de (C) et déterminer son point d'inflexion I .

c) Déterminer une équation de la tangente (T) en I à (C) .

d) Tracer (T) et (C) (***unité graphique : 2 cm***) .

3- a) Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction $F: x\rightarrow(a\cos x+b\sin x)e^{x}$ soit une primitive de f .

b) Calculer l'aire du domaine limité par (C) et l'axe des abscisses .

4- a) Montrer que f admet sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{4}]$ une fonction réciproque g .

b) Déterminer le domaine de définition de g .

5- Soit (C') la courbe représentative de g dans le même repère que (C) .
Montrer que la tangente à (C') au point d'intersection avec l'axe des abscisses est parallèle à (T) . Tracer (C') .

Concours d'entrée 2010-2011 **Solution de Mathématiques** **Durée: 3 h**

I- On a $a=1+i$, $b=3+2i$ et $c=1+5i$.

$$\frac{c}{b}=\frac{1+5i}{3+2i}=\frac{(1+5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{13+13i}{13}=1+i=a \ .$$

OU $ab=(1+i)(3+2i)=3+2i+3i-2=1+5i=c$. donc , $\dfrac{c}{b}=a$.

$\dfrac{c}{b}=a$ donne $\arg(\dfrac{c}{b})=\arg(a)$; tel que $\arg(c)-\arg(b)=\arg(a)$ Où

- $\arg(a)=\dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$;
- Un argument de b est β tel que $\beta\in]0\,;\dfrac{\pi}{2}[$ et $\tan\beta=\dfrac{\operatorname{Im}(b)}{\operatorname{Re}(b)}=\dfrac{2}{3}$ alors $\arg(b)=\arctan\dfrac{2}{3}\ (2\pi)$
- Un argument de c est γ tel que $\gamma\in]0\,;\dfrac{\pi}{2}[$ et $\tan\gamma=\dfrac{\operatorname{Im}(c)}{\operatorname{Re}(c)}=5$ alors $\arg(c)=\arctan 5\ (2\pi)$

Finalement $\arg(c)-\arg(b)=\arg(a)$ donne $\arctan 5-\arctan\dfrac{2}{3}=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $k\in Z$.

mais $0<\arctan 5-\arctan\dfrac{2}{3}<\dfrac{\pi}{2}$, alors $\arctan 5-\arctan\dfrac{2}{3}=\dfrac{\pi}{4}$.

II- Considère l'évènement R : " la face visible est rouge " .
Le jeton A est le seul qui a deux faces rouges, la probabilité demandé est $p(A/R)$.

Tous les jetons ont la même probabilité d'être sélectionnée, $p(A)=p(B)=p(C)=\dfrac{1}{3}$.

- Si le jeton A est sélectionné et jetés, alors, la face visible est nécessaire rouge; $p(R/A)=1$.
- Si le jeton B est sélectionné et jetés, alors, la face visible est nécessaire blanche; $p(R/B)=0$.
- Si le jeton C est sélectionné et jetés, alors, la face visible est soit blanche ou rouge

$p(R/C)=\dfrac{1}{2}$.

$p(A/R)=\dfrac{p(A\cap R)}{p(R)}$ ou :

- $p(A\cap R) = p(A)\times p(R/A) = \frac{1}{3}\times 1 = \frac{1}{3}$
- $p(R) = p(A\cap R) + p(B\cap R) + p(C\cap R)$

$$p(R) = \frac{1}{3} + p(B)\times p(R\cap B) + p(C)\times p(R/C) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Finalement , $p(A/R) = \frac{p(A\cap R)}{p(R)} = \frac{1}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

III- 1- La fonction g est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = x - \ell n(1+x)$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1 - \frac{\ell n(1+x)}{x}\right] = +\infty$.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{1+x} .$$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g admet 0 comme un minimum absolue quand $x = 0$;
donc , pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$; qui est $\ell n(1+x) < x$.

b) ▪ $\ell n(U_n) = n\,\ell n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

▪ Pour $x = \frac{1}{n}$, $\ell n(1+x) < x$ donne $\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$; donc $\ell n(U_n) < 1$. ainsi $U_n < e$.

2- La fonction h est définie sur $[0\,;+\infty[$ by $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ell n(1+x)$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$; alors $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

$$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x}{(x+1)^2} .$$

x	0		$+\infty$
$h'(x)$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

La fonction h admet 0 comme un maximum absolue quand $x = 0$;
Donc , pour tout $x > 0$, $h(x) < 0$; qui est $\ell n(1+x) > \frac{x}{x+1}$.

b) ▪ $\ell n(V_n) = (n+1)\,\ell n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

▪ pour $x = \dfrac{1}{n}$, $\ell n(1+x) > \dfrac{x}{x+1}$ donne $\ell n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) > \dfrac{1}{n+1}$; donc $\ell n(V_n) > 1$. Ainsi $V_n > e$.

3- a) ▪ Pour tout $n \geq 1$, $V_n - U_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}-1\right) = \dfrac{1}{n}U_n$.

▪ La relation $U_n < e$ donne $\dfrac{1}{n}U_n < \dfrac{e}{n}$ alors , $V_n - U_n < \dfrac{e}{n}$.

b) ▪ La relation $U_n < e$ donne $e - U_n > 0$.

▪ La relation $V_n > e$ donne $V_n - U_n > e - U_n$.

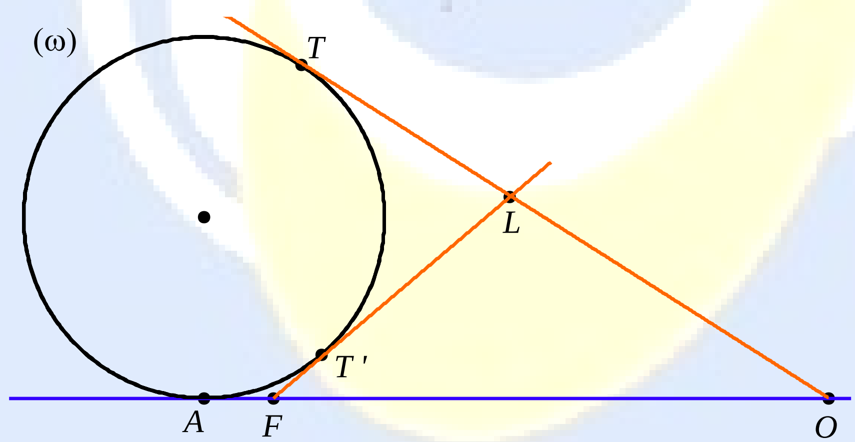
Donc, pour tout $n \geq 1$, $0 < e - U_n < V_n - U_n$.

c) ▪ La relation $0 < e - U_n < V_n - U_n$ ou $V_n - U_n < \dfrac{e}{n}$ donne $0 < e - U_n < \dfrac{e}{n}$

▪ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n} = 0$ alors , $\lim\limits_{n\to+\infty}(e - U_n) = 0$; qui est $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

IV- 1- On a $OT = OA = 9$, $FT' = FA = 1$ et $LT = LT'$.

$LO = OT - LT = 9 - LT$ et $LF = LT' + FT' = LT' + 1$. donc $LO + LF = 10 > FO$.



(ω) varies, L se déplace sur l'ellipse (E) de foyers O et F d'un axe principal $2a = 10$.

2- a) Dans le système donné $O(0\,;0)$ et $F(-8\,;0)$.

- Le centre d'ellipse est le point milieu $(-4\,;0)$ de $[OF]$.
- L'axe focal est l'axe des abscisses.
- $2a = 10$ et $2c = OF = 8$; alors $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 3$.

L'équation d'ellipse (E) est $\dfrac{(x+4)^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

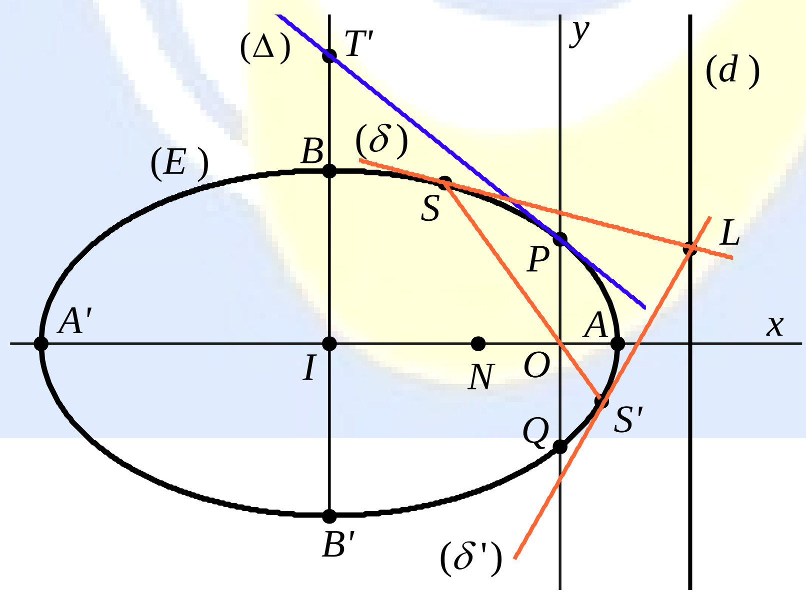
b) Pour l'ellipse (E), L'axe focal est l'axe des abscisses.

Le correspond directrice au foyer O est le droite (d) d'équation $x = -4 + \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{9}{4}$.

3- a) ▪ L'axe des ordonnées est le perpendiculaire à l'axe focale de foyer O de (E) ; Donc il coupe (E) en deux points P et Q tel que $\overline{OP} = -\overline{OQ} = p = \dfrac{9}{5}$.

Ou ▪ Les coordonnées des points d'intersection de l'axe des ordonnées et (E) sont les solutions de L'équation $9(0+4)^2 + 25y^2 = 225$; $25y^2 = 81$; $y = \dfrac{9}{5}$ or $y = -\dfrac{9}{5}$. Ainsi $P(0;\dfrac{9}{5})$, $Q(0;-\dfrac{9}{5})$.

- Les sommets principaux de (E) sont les points de l'axe focale d'abscisses $-4+a = 1$ et $-4-a = -9$; Ces points sont $A(1\,;0)$ et $A'(-9\,;0)$.
- Les sommets secondaires de (E) sont les points de coordonnées d'abscisses -4, $b = 3$ et $-b = -3$; Ces points: $B(-4\,;3)$ et $B'(-4\,;-3)$.
- Tracer (E)



b) Une équation de la tangente (Δ) à (E) au $P(0;\frac{9}{5})$ est $\frac{(x_P+4)}{25}(x+4)+\frac{y_P}{9}y=1$

(Δ) : $4x+5y-9=0$.

(Δ) coupe l'axe non focal de (E) au $T(-4\,;5)$

Le cercle auxiliaire de (E) est le cercle (γ) de centre $I(-4\,;0)$ et de rayon $a=5$.

$IT=5$ alors $T\in(\gamma)$.

4- a) Une équation de la tangente (δ) à (E) au $S(x_0\,;\,y_0)$ est $\frac{(x_0+4)}{25}(x+4)+\frac{y_0}{9}y=1$.

(δ) coupe la directrice (d) au point $L(\frac{9}{4}\,;\,y)$ tel que $\frac{(x_0+4)}{25}(\frac{9}{4}+4)+\frac{y_0}{9}y=1$; alors $y=-\frac{9x_0}{4y_0}$.

b) Le droite (OS) coupe (E) au point $S'(x_1\,;\,y_1)$ tel que $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_0}{y_0}$. Les O , S et S'

sont colineaires . Les tangentes (δ') à (E) au S' coupe la directrice (d) au point d'ordonnée

$-\frac{9x_1}{4y_1}=-\frac{9x_0}{4y_0}$ qui est le point L .

V- 1- Le triangle rectangle OAB est isocèles en O ; alors $OA=OB$ et $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{2}\quad(2\pi)$.

donc $B=r(A)$ où r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

de même, $D=r(C)$ et $F=r(E)$.

Les points A , C et E appartient à la droite (d) ; donc leur images B , D et F par r appartient à l'image de (d) par r qui est une ligne droite (d_1) perpendiculaire a (d) Ainsi l'angle d r est $\frac{\pi}{2}$.

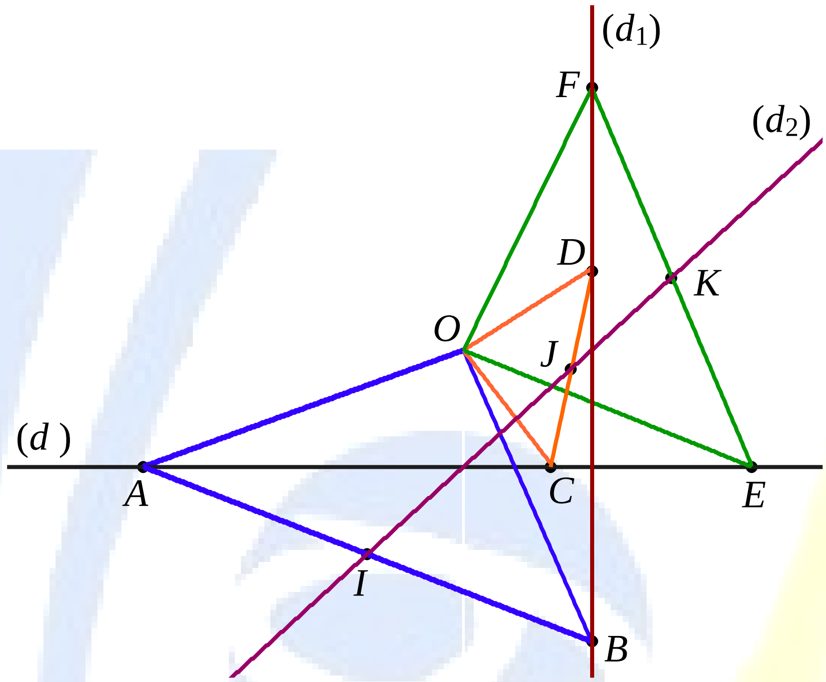
2- Le triangle rectangle OAB est isocèles en O, I est le milieu de $[AB]$; alors

$OI=\frac{\sqrt{2}}{2}OA$ et $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OI})=\frac{\pi}{4}\quad(2\pi)$. Donc, le similitude S de center O qui transforme A en I a le rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et l'angle $\frac{\pi}{4}$.

3- Le triangle rectangle OCD est isocèles en O, J est le milieu de $[CD]$. Donc,

$(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OJ})=\frac{\pi}{4}$ et $OJ=\frac{\sqrt{2}}{2}OC$. alors $S(C)=J$.

De meme, $S(E)=K$.



4- ▪ Les points A , C et E appartient à la droite (d) ; leur images I , J et K Appartient à la droite (d_2) .

▪ $S(A)=I$, $S(C)=J$ et $S(E)=K$ alors $IJ=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$ et $JK=\frac{\sqrt{2}}{2}CE$. donc $\frac{IJ}{JK}=\frac{AC}{CE}=2$.

Ou le points A , C et E sont $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CE}$; leur image I , J et K par S , sont $\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{JK}$; donc I , J et K sont collinaires et $\frac{IJ}{JK}=2$.

5- Let P , Q et R sont les centres de gravité des triangles OAB , OCD et OEF .
Ces points sont tel que $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OR}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$. Ainsi P , Q et R sont respectivement des images de I , J et K par la dilatation h de centre O et de rayon $\frac{2}{3}$

Les points I , J et K appartient à la droite (d_2) ; leur images P , Q et R par h appartient a leur image de (d_2) par h qui est la droite (d_3) parallèle à (d_2) .

6- On rapporte le plan au système orthonormé $(O\ ; \overrightarrow{u}\ , \overrightarrow{v})$ tel que $A(-5\,;-2)$ et $C(1\,;-2)$.

a) Soit $E(x\,;\,y)$. la relation $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CE}$ est équivalent à $2(x-1)=6$ et $2(y+2)=0$;
alors $x=4$ et $y=-2$ et $E(4\,;-2)$.

b) $S = S(O\ ; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ; \dfrac{\pi}{4})$; l'expression complexe de S est $z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z = \dfrac{1}{2}(1+i)z$.

c) $I = S(A)$; alors $z_I = \dfrac{1}{2}(1+i)z_A = \dfrac{1}{2}(1+i)(-5-2i) = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{7}{2}i$. Donc $I(-\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{7}{2})$.

$J = r(C)$; alors $z_J = \dfrac{1}{2}(1+i)z_C = \dfrac{1}{2}(1+i)(1-2i) = 2+i$. Donc $J(\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{1}{2})$.

$K = r(E)$; alors $z_K = \dfrac{1}{2}(1+i)z_E = \dfrac{1}{2}(1+i)(4-2i) = 2+4i$. Donc $K(3\,;1)$.

I , J et K are colinéaires sur la droite d'équation $y = x-2$.

Ou $\overrightarrow{IJ}(3\,;3)$ et $\overrightarrow{JK}(1.5\,;1.5)$; alors $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{JK}$; Donc I , J et K sont collinaires.

d) $I(-\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{7}{2})$ est le milieu de $[AB]$ ou $A(-5\,;-2)$; donc $B(2\,;-5)$.

$J(\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{1}{2})$ est le milieu de $[CD]$ ou $C(1\,;-2)$; donc $D(2\,;1)$.

$K(3\,;1)$ est le milieu de $[EF]$ ou $E(4\,;-2)$; donc $F(2\,;4)$.

Ou $r = r(O\ ; \dfrac{\pi}{2})$; l'expression complexe de r est $z' = i\,z$.

$B = r(A)$; alors $z_B = i\,z_A = i(-5-2i) = 2-5i$; donc $B(2\,;-5)$.
De même pour, $D = r(C)$ et $F = r(E)$; donc $D(2\,;1)$ et $F(2\,;4)$.
Les trois points B , D et F sont colinéaires on the straight line of equation $x=2$.

V- $f(x) = e^x \cos x$, $x \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$.

1- a) $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x)$ et

$$\sqrt{2}\ e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\ e^x (\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\ e^x (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$$

donc $f'(x) = \sqrt{2}\ e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

L'équation $f'(x) = 0$ est équivalente a $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ ou $-\frac{\pi}{4} \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4}$; donc

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \ ; \ x = \frac{\pi}{4} .$$

b) Si $x \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4}]$ alors , $x + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}]$; donc $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ge 0$ et f est strictement croissant

Si $x \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}]$ alors , $x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{4}]$; donc $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 0$ et f est strictement décroissant .

c) Table de variation de f :

$m = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}} \approx 1.55$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	m	↘	0

2- a) ▪ $f'(x) = \sqrt{2}\ e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}} \times e^{x + \frac{\pi}{4}} \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}} f(x + \frac{\pi}{4})$.

▪ $f''(x) = \sqrt{2}\ f'(x + \frac{\pi}{4}) = 2e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -2e^x \sin x$.

b) Le signe de $f''(x)$ est l'opposé à $\sin x$; donc :

▪ Si $x \in [-\frac{\pi}{2} ; 0[$ alors $f''(x) > 0$ et (C) concaves vers le haut.

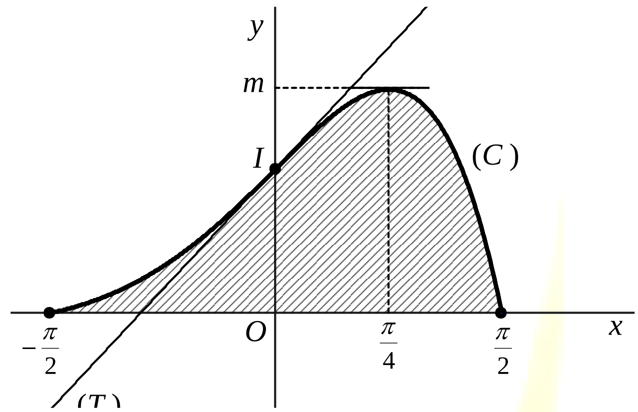
▪ Si $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}]$ alors $f''(x) < 0$ et

(C) concaves vers le bas.

Le point d'inflexion de (C) est $I(0\,;1)$

c) l'équation de tangent (T) a (C) au I est $y = f\,'(0)x+1$; (T) : $y = x+1$.

d) Tracer (T) et (C) .



3- a) $F(x) = (a\cos x + b\sin x)e^x$; $F\,'(x) = (a\cos x + b\sin x)e^x + (-a\sin x + b\cos x)e^x$.

Le fonction F est une primitive de f si , pour tout x dans $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$, $F\,'(x) = f(x)$; est

$(a+b)\cos x - (a-b)\sin x = \cos x$; donc , $a+b=1$ and $a-b=0$. Finalement, $a = b = \frac{1}{2}$.

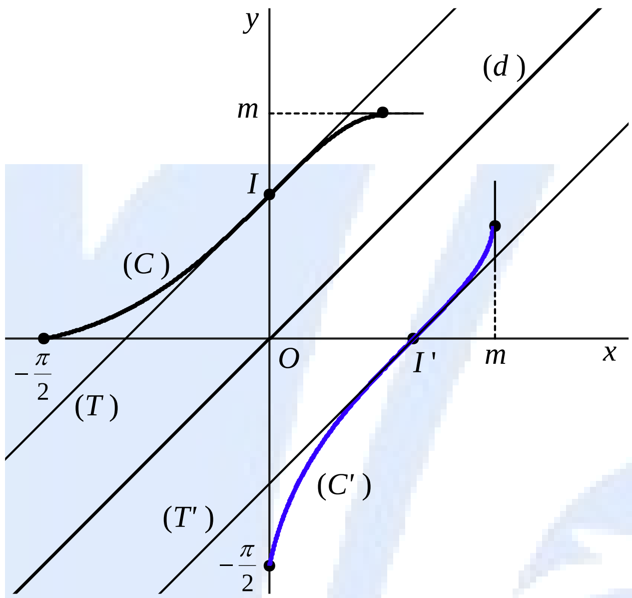
b) La courbe (C) situe au-dessus de l'axe des abscisses, la surface nécessaire est

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$ unités d'aire.

$S = F(\frac{\pi}{2}) - F(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$ unités d'aire; $S = 2(e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}})\ cm^2$.

4- a) Le fonction f est continue sur $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{4}]$ (produit de deux fonctions continues) et strictement croissant, donc f à une fonction inverse g ou le domaine de définition est

$$f\left([-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{4}]\right) = [0\,;m] .$$



b) (C) coupe l'axe au $I(0\,;1)$ et admet une ligne de tangent (T) parallèle à (d).
Par symétrique par rapport à (d), (C') coupe
l'axe d'abscisse à $I'(0\,;1)$ et admet à ce point une ligne de tangent (T') parallèle à (d) ; alors (T') est parallèle a (T)

c) La courbe représentative (C') de g est le
partie symétrique de (C) dans $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{4}]$par rapport à une droite (d) de l'équation

$y = x$.