UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DE GENIE

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2009-2010 **Mathématiques** **Durée : 3 heures**

11 juillet 2009

La distribution des notes est sur 25

I- (5 pts) ***A-*** On donne le tableau de variations d'une fonction continue g définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$g(x)=m+n\,\frac{\ell n\,x}{x}.$$

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-2e^{-1}$	$\nearrow$	1

1- a) Montrer que $m=1$ et $n=-2$.

b) Montrer que , pour tout x dans $]0\,;+\infty[$, $\ell n x\le \dfrac{x}{e}$.

2- a) Montrer que la courbe représentative de toute primitive de g sur $]0\,;+\infty[$ admet un point d'inflexion I .

b) Déterminer la primitive G de g pour laquelle le point I appartient à la droite d'équation $y=x$.

B- Soit F la fonction telle que $F(x)=\dfrac{x}{x-\ell n\,x}$.

1- a) En utilisant la partie ***A*** , justifier que F est définie sur $]0\,;+\infty[$.

b) Montrer que F est prolongeable par continuité en 0 et définir le prolongement f de F .

c) Montrer que f est dérivable en 0 .

2- On considère la suite (U_n) définie pour $n\in IN$, par $U_n=\left(\dfrac{\ell n\,a}{a}\right)^n$ où a un réel donné de $]1\,;+\infty[$.

a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique strictement décroissante .

b) Soit S_n la somme définie par $S_n=U_0+U_1+U_2+U_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+U_n$.

Calculer S_n en fonction de n et a , puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=f(a)$.

(3 pts) Le personnel d'un hôpital est réparti en trois catégories : Médecins (M), Soignants (S) et Techniciens (T).

$20\ \%$ sont des médecins et $50\ \%$ sont des soignants .

$75\ \%$ des médecins sont des hommes et $80\ \%$ des soignants sont des femmes .

On interroge au hasard un membre du personnel .

1- Calculer la probabilité que la personne interrogée soit :

a) un technicien ; b) une femme sachant qu'elle est médecin ; c) un homme sachant qu'il est un soignant .

2- Calculer la probabilité que la personne interrogée soit :

a) une femme médecin ; b) une femme soignante .

3- Sachant que $51\,\%$ du personnel sont des femmes :

a) Calculer la probabilité que la personne interrogée soit une femme technicienne .

b) En déduire la probabilité que la personne interrogée soit une femme sachant qu'elle est technicienne .

III- (6 pts) ***A-*** 1- Résoudre l'équation différentielle $(I):\ y' + 2xy = 0$ et montrer que sa solution générale peut s'écrire sous la forme $y = C e^{-x^2}$ où C est une constante arbitraire.

2- On considère l'équation différentielle $(II):\ x y' + 2(x^2 - 1)y = 0$.

On pose $y = x^2 z$ où z est une fonction dérivable définie sur IR^* .

a) Déterminer une équation différentielle dont la solution générale est la fonction z .

b) Déterminer la fonction z et déduire la solution générale de l'équation (II) .

B- On considère les fonctions f et g définie sur IR par $f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = x^2 e^{-x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f et par (C') celle de g .

1- Montrer que f est une fonction paire et dresser son tableau de variations.

2- Montrer que g est une fonction paire et dresser son tableau de variations.

3- a) Déterminer les points d'intersection de (C) et (C') .

b) Tracer (C) et (C') dans un même repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$ (unité graphique : $3\ cm$).

4- Soit F la primitive de f sur IR telle que $F(0) = 0$ et G la fonction définie sur IR par $G(x) = \dfrac{1}{2}\left[F(x) - x e^{-x^2}\right]$. Montrer que G est la primitive de g sur IR telle que $G(0) = 0$.

5- On donne $F(1) = 0{,}75$.

a) Calculer l'aire A du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

b) Calculer l'aire A' du domaine limité par (C), (C') et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

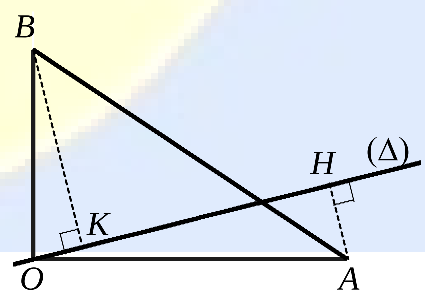
6- Soit S l'aire du domaine limité par (C) et les demi droites $[Ox)$ et $[Oy)$, et S' l'aire du domaine limité par (C') et les demi droites $[Ox)$ et $[Oy)$. Montrer que $S = 2S'$.

IV – (5 pts) On considère dans le plan orienté un triangle rectangle AOB tel que $(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OB}\ ) = \dfrac{\pi}{2}\quad (2\pi)$.

Soit (Δ) une droite variable passant par O .

H et K sont les projetés orthogonaux de A et B sur (Δ) .

Soit S la similitude telle que $S(O) = A$ et $S(B) = O$.



1- Déterminer l'angle de S .

2- Montrer que le centre I de S appartient aux cercles de diamètres $[OA]$ et $[OB]$. En déduire que I est le projeté orthogonal de O sur $[AB]$.

3- a) Déterminer l'image par S de chacune des droites (BK) et (Δ) .

En déduire que $S(K) = H$.

b) Montrer que, quand (Δ) varie, le cercle (γ) de diamètre $[HK]$ passe par un point fixe que l'on déterminera.

4- On considère l'homothétie h de centre B et de rapport 2.

Soit M le milieu de $[OB]$; O' et B' les points symétriques respectifs de O et B par rapport à I.

a) Montrer que $S(B') = O'$ et déterminer $S \circ h(M)$ et $S \circ h(I)$.

b) En déduire que la médiane (IM) du triangle IOB est une hauteur du triangle IAO'.

V- (6 pts) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ on considère la parabole (P) d'équation $y^2 = 4(x+1)$.

1- a) Déterminer le foyer , la directrice (d) et le sommet V de (P).

b) Tracer (P) et la tangente (Δ) à (P) en V.

2- Soit A un point de (P) d'ordonnée a $(a \neq 0)$, A' le projeté orthogonal de A sur (Δ) et (D) la perpendiculaire à (VA) passant par A'.

a) Ecrire une équation de (D) et montrer que , quand A varie sur (P), (D) passe par un point fixe L à déterminer .

b) (D) coupe (VA) en E. Montrer que , quand A varie sur (P), E varie sur un cercle fixe à déterminer .

3- La droite (OA) recoupe la parabole (P) en B. Soit I le milieu de $[AB]$.

On désigne par C, D et J les projetés orthogonaux respectifs de A , B et I sur (d).

a) Calculer IJ en fonction de AC et BD.

b) Montrer que , quand A varie sur (P) , le cercle (γ) de diamètre $[AB]$ reste tangent à (d).

4- a) Soit b l'ordonnée de B. Montrer que $ab = -4$.

b) La normale en A à (P) et la normale en B à (P) se coupent en N. Montrer que N appartient à (γ).

Concours d'entrée 2009 - 2010 **Solution de Mathematique** **Durée : 3 heures**
July 11 , 2009

I- ***A-*** 1- Le fonction g est définie par $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=m+n\dfrac{\ell n\,x}{x}$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=m=1$ et $g(e)=m+\dfrac{n}{e}=1+\dfrac{n}{e}=1-\dfrac{2}{e}$. donc $n=-2$.

Finalement , $g(x)=1-2\dfrac{\ell n\,x}{x}$.

b) Le tableau présent, pour tout x dans $]0\,;+\infty[$, $1-2\dfrac{\ell n\,x}{x}\geq 1-\dfrac{2}{e}$; $\ell nx\leq\dfrac{x}{e}$ ($x>0$) .

2- a) $G'(x)=g(x)$ et $G''(x)=g'(x)$.

Le signe de $g'(x)$ change au e ; donc, la concavité de la courbe de G change au point I d'abscisse e donc, (C) a un point d'inflexion $I(e\,;G(e))$.

b) $G(x)=\displaystyle\int g(x)\,dx=\int[1-2\frac{\ell n\,x}{x}\,]dx=x-\ell n^2x+C$.

I appartient à la droite d'équation $y=x$ si et seulement si $G(e)=e$; $C=1$. Alors $G(x)=x+1-\ell n^2x$.

B- 1- a) pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $\ell nx\leq\dfrac{x}{e}<x$. donc $x-\ell n\,x\neq 0$ et F est définie sur $]0\,;+\infty[$.

b) ▪ Le fonction $x\to x-\ell n\,x$ est continue dans $]0\,;+\infty[$; alors F est continue dans $]0\,;+\infty[$.

▪ $\lim\limits_{x\to0^+}[x-\ell n\,x]=+\infty$; donc $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x-\ell n\,x}=0$ (limite finie).

F admet une extension par la continuité à 0 .

La fonction d'extension f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\dfrac{x}{x-\ell n\,x} \quad pour\ x\neq 0\end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x-\ell n\,x}=0$ (limite finie) . f est différentiable en 0 et $f'(0)=0$.

2- a) ▪ $U_{n+1}=\left(\dfrac{\ell n\,a}{a}\right)^{n+1}=\left(\dfrac{\ell n\,a}{a}\right)^{n}\times\left(\dfrac{\ell n\,a}{a}\right)=U_n\times\left(\dfrac{\ell n\,a}{a}\right)$; (U_n) est une suite géométrique de rapport commun $r=\dfrac{\ell n\,a}{a}$ et de premier terme $U_0=1$.

▪ $U_{n+1} - U_n = \left(\dfrac{\ell n\, a}{a}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{\ell n\, a}{a}\right)^{n} = \left(\dfrac{\ell n\, a}{a}\right)^{n} \times \left(\dfrac{\ell n\, a}{a} - 1\right)$ ou $\dfrac{\ell n\, a}{a} > 0$ et $\dfrac{\ell n\, a}{a} \le \dfrac{1}{e} < 1$.

Donc, $U_{n+1} - U_n < 0$ et (U_n) est strictement décroissant.

b) (U_n) est une suite géométrique et S_n est la somme du terme consécutive $n+1$, alors

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots + U_n = U_0 \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1-\left(\dfrac{\ell n\, a}{a}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{\ell n\, a}{a}} .$$

Alors $0 < \dfrac{\ell n\, a}{a} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ell n\, a}{a}\right)^{n+1} = 0$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-\dfrac{\ell n\, a}{a}} = \dfrac{a}{a-\ell n\, a} = f(a)$

II- 1- Quand un membre du personnel est choisi par hasard, il y a trois possibilités: un docteur (D) , une nurse (N) ou un Technicien (T) .

a) il est donné que $p(D) = 0.2$, $p(N) = 0.5$ alors $p(T) = 1 - 0.2 - 0.5 = 0.3$.

b) Pour un de trois catégories, ils ont trois possibilités: homme (M) ou femme (W) .

il est donné que $p(M/D) = 0.75$ alors, $p(W/D) = p(\overline{M}/D) = 1 - 0.75 = 0.25$.

c) il est donné que $p(W/N) = 0.8$ alors , $p(M/N) = p(\overline{W}/N) = 1 - 0.8 = 0.2$.

2- a) The event " the person is a woman doctor " can be represented by $D \cap W$; its probability is $p(D \cap W) = p(D) \times p(W/D) = 0.2 \times 0.25 = 0.05$.

b) The event " the person is a woman nurse " can be represented by $N \cap W$; its probability is $p(N \cap W) = p(N) \times p(W/N) = 0.5 \times 0.8 = 0.4$.

3- a) L'évènement " la personne est une femme technicienne " peut représenter par $T \cap W$.

La formula de probabilité totale est : $p(W) = p(D \cap W) + p(N \cap W) + p(T \cap W)$, donc

$p(T \cap W) = p(W) - p(D \cap W) - p(N \cap W)$

Si $51\,\%$ du personnel sont des femmes alors $p(W) = 0.51$.

$p(T \cap W) = 0.51 - 0.05 - 0.4 = 0.06$.

b) La probabilité que la personne a demandé une femme en sachant qu'elle est une technicienne est égale a:

$p(W/T) = \dfrac{p(W \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0.06}{0.3} = 0.2$.

III - *A*- 1- $(I): \; y' + 2xy = 0$.

▪ Le fonction $y = 0$ est la solution particulière de (I).

▪ Les autres solutions sont ceux de l'équation $\dfrac{y'}{y} = -2x$ alors, $\ell n|y| = -x^2 + K$; $K \in IR$.

$|y| = e^K \times e^{-x^2}$; $|y| = a\,e^{-x^2}$ ou $a \in]0 + \infty[$; $y = \lambda e^{-x^2}$ donc $\lambda \in IR^*$.

La solution générale de (I) est $\begin{cases} y = 0 \quad et \\ y = \lambda e^{-x^2} \quad \text{ou} \quad \lambda \in IR^* \end{cases}$ qui est $y = C e^{-x^2}$

Ou $C \in IR$.

2- Considère l'équation differential $(II): \; x y' + 2(x^2 - 1)y = 0$.

a) If $y = x^2 z$ alors , $y' = 2xz + x^2 z'$.

Par substitution dans l'équation (II) nous obtenons $2x^2 z + x^3 z' + 2(x^2 - 1)x^2 z = 0$; alors $z' + 2xz = 0$.

b) Selon la partie 1), La solution générale de l'équation $z' + 2xz = 0$ est $z = C e^{-x^2}$.

Donc la solution générale de l'équation (II) est $y = C x^2 e^{-x^2}$ ou $C \in IR$

B- 1- ▪ L'ensemble IR est centré sur 0 et , pour tout x dans IR , $f(-x) = f(x)$;
donc le fonction f est paire .

▪ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;

$f'(x) = -2x e^{-x^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

2- ▪ L'ensemble IR est centré sur 0 et , pour tout x dans IR , $g(-x) = g(x)$; donc le fonction g est paire.

▪ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{e^t} = 0$.

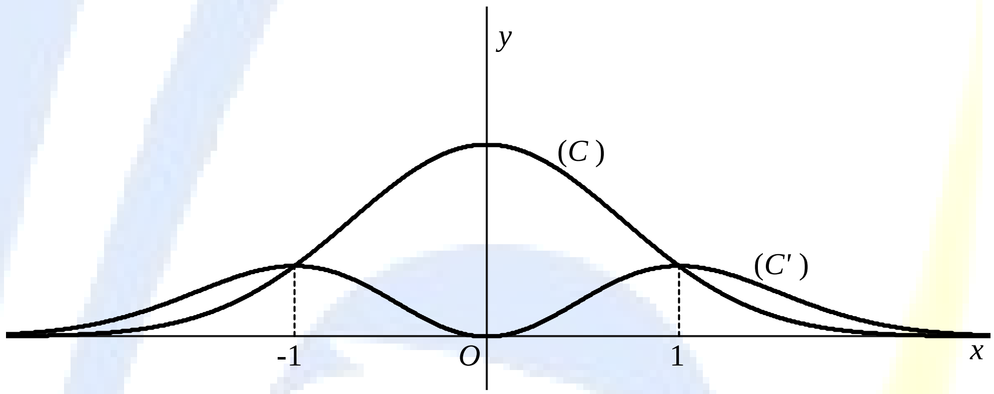
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	e^{-1}	↘	0	↗	e^{-1}	↘	0

$g'(x) = 2x e^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2} = 2x(1 - x^2) e^{-x^2}$.

3- a) Les abscisses des points d'intersection de (C) et (C') sont les racines de l'équation $f(x) = g(x)$; $x^2 - 1 = 0$; $x = -1$ or $x = 1$.

Les points d'intersections de (C) et (C') sont $(-1\,;e^{-1})$ et $(1\,;e^{-1})$.

b) Tracer (C) et (C').



4- La fonction F est définie sur IR qui satisfait $F'(x) = f(x) = e^{-x^2}$ et $F(0) = 0$.

G est la fonction définie sur IR par $G(x) = \frac{1}{2}\left[F(x) - xe^{-x^2}\right]$.

- $G'(x) = \frac{1}{2}\left[F'(x) - e^{-x^2} + 2x^2 e^{-x^2}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{-x^2} - e^{-x^2} + 2x^2 e^{-x^2}\right] = x^2 e^{-x^2} = g(x)$.
- $G(0) = \frac{1}{2}\left[F(0) - 0\right] = 0$.

G est la primitive de g sur IR qui satisfait $G(0) = 0$.

5- a) La courbe (C) situe au-dessus de l'axe des abscisses, la surface demandée est $A = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

La fonction est paire :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\,dx = 2\left[F(x)\right]_0^1 = 2[F(1) - F(0)] = 2[0.75 - 0] = 1.5 \ .$$

$A = 1.5$ *unité de surface* tel que $A = 1.5 \times 3^2 = 13.5 \quad cm^2$.

b) L'intervalle $[-1\,;1]$, (C) situe au-dessus de (C') alors , la surface demandée est :

$$A'=\int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]dx \text{ unité de surface.}$$

$$\int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]dx=2\int_{0}^{1}[f(x)-g(x)]dx=2\left[F(x)-G(x)\right]_0^1=\left[F(x)+xe^{-x^2}\right]_0^1=F(1)+e^{-1}=0.75+e^{-1}$$

$A'=0.75+e^{-1}$ *unité de surface*; tel que $A=6.75+9e^{-1}\quad cm^2$.

6- Soit m est un nombre strictement positif.
Dans l'intervalle $[0\,;m]$, (C) situe au-dessus de l'axe des abscisses puis la surface du domaine est limitée par (C), $x'x$, $y'y$ et la droite de l'équation $x=m$ est égale au $I(m)$ *unité de surface* .

$$I(m)=\int_0^m f(x)\,dx=F(m)-F(0)=F(m).$$

Donc $S=\lim\limits_{m\to+\infty}I(m)=\lim\limits_{m\to+\infty}F(m)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ *unité de surface* .

De même, $S'=\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)$ *unité de surface* .

$G(x)=\dfrac{1}{2}\left[F(x)-xe^{-x^2}\right]$; alors $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x^2}=0$.

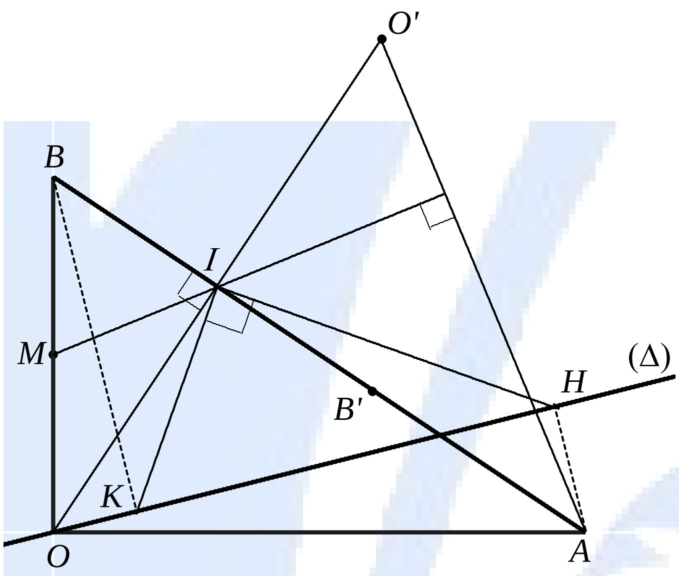
Donc $S'=\dfrac{1}{2}S$; tel que $S=2S'$.

IV- 1- La similitude S est tel que $S(O)=A$ et $S(B)=O$.

L'angle de S est $(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{AO})=\pi+(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA})=\pi-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}\quad(2\pi)$

2- I est le centre de S .

- $S(O)=A$; alors $(\overrightarrow{IO}\,;\overrightarrow{IA})=\dfrac{\pi}{2}$ et I appartient au cercle de diamètre $[OA]$.
- $S(B)=O$; alors $(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{IO})=\dfrac{\pi}{2}$ et I appartient au cercle de diamètre $[OB]$.



Le point commun, autre que O, pour les deux cercles est la projection orthogonale de O

sur $[AB]$, alors le centre I de est la projection orthogonale de O à $[AB]$.

3- a) L'angle de S est $\frac{\pi}{2}$; alors toute la droite et leur image de S est perpendiculaire.

- $S(B)=O$; l'image de S dans le (BK) est perpendiculaire a (BK) en passant par O qui est la droite (Δ).
- $S(O)=A$; l'image du S dans la (Δ) est la perpendiculaire de (Δ) passant par O qui est la droite (AH)
- K est le point d'intersection de (BK) et (Δ); l'image de K par S est le point d'intersection de (Δ) et (AH) ; alors $S(K)=H$.

b) $S(K)=H$; $(\overrightarrow{IK}\ ;\ \overrightarrow{IH}\ )=\frac{\pi}{2}$. quand (Δ) varies, le cercle (γ) de diamètre $[HK]$ passe par le point fixe I .

4- a) ▪ O' et B' sont les symétriques de O et B par rapport au I ; alors $\overrightarrow{IO}'=-\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IB}'=-\overrightarrow{IB}$.

$S(B)=O$; alors , $IO=\lambda IB$ (λ est le rapport de S) et $(\overrightarrow{IB}\ ;\ \overrightarrow{IO}\ )=\frac{\pi}{2}$; donc

$IO'=\lambda IB'$ et $(\overrightarrow{IB}'\ ;\ \overrightarrow{IO}')=\frac{\pi}{2}$. Par consequent, $S(B')=O'$.

- M est le milieu de $[OB]$; alors $\overrightarrow{BO} = 2\,\overrightarrow{BM}$ et $h(M) = O$.
- $S \circ h(M) = S\left(h(M)\right) = S(O) = A$ et $S \circ h(I) = S\left(h(I)\right) = S(B') = O'$.

b) $S \circ h(M) = A$ et $S \circ h(I) = O'$. L'image de la médiane (IM) dans le triangle IOB est la droite (AO').

mais h est la dilatation positive, alors $S \circ h$ est la similitude de même angle $\frac{\pi}{2}$; la droite (IM) et leur image (AO') par S est perpendiculaire.

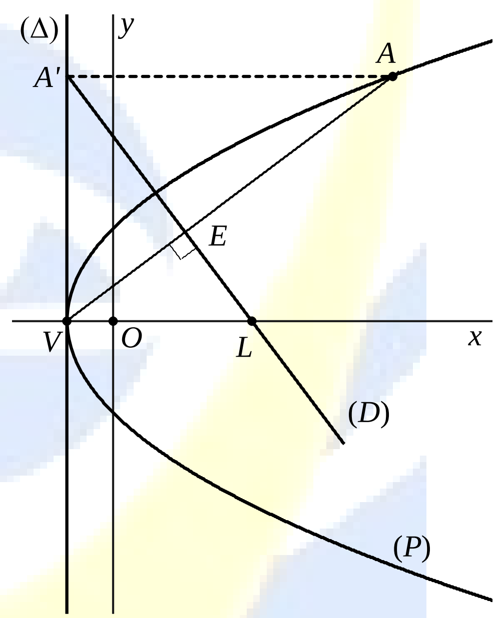
La médiane (IM) dans le triangle IOB est une hauteur du triangle IAO'.

V- 1- a) $(P) : y^2 = 4(x+1)$.

Le paramètre de (P) est $p = 2$, le sommet est $V(-1\,;0)$, le focus est $O(0\,;0)$ et la directrice est la droite (d) de l'équation $x = -2$.

b) $(\Delta) : x = -1$

Drawing (P) and (Δ).



2- $A(\frac{a^2}{4} - 1\,;a)$; $A'(-1\,;a)$.

a) (D) est la perpendiculaire de (VA) par A' ;

$\overrightarrow{VA}(\frac{a^2}{4}\,;a)$ est un vecteur normal de (D).

$(D) : \frac{a^2}{4}(x+1) + a(y-a) = 0$; $a(x-3) + 4y = 0$.

Quand A varie sur (P) , a trace IR^* et (D) passes par le point fixe $L(3\,;0)$.

b) $L\hat{E}V = 90^\circ$ ou L et V sont fixes .

Quand A varie sur (P), E varie sur le cercle fixe de diamètre $[LV]$.

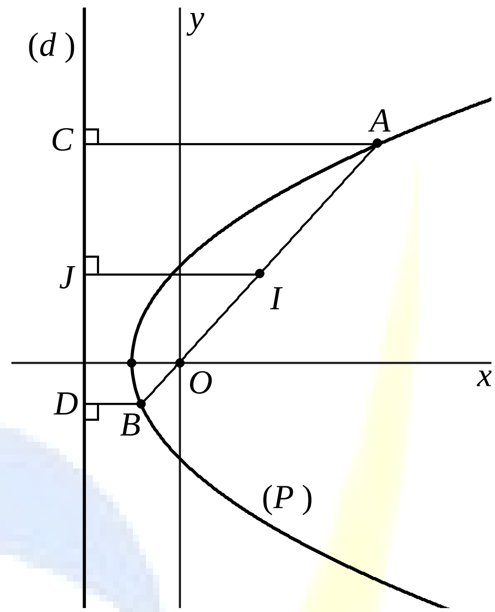
3- Le rayon de cercle du diamètre $[AB]$ est $r = \frac{1}{2}AB$.

a) La distance du I a (d) est égale à $IJ = \frac{1}{2}(AC + BD)$.

b) A et B sont sur la parabole (P) alors $AC = AO$ et $BD = BO$; La distance de I ă (d) est

$$IJ = \frac{1}{2}(AO + BO) = \frac{1}{2}AB = r \ .$$

Quand A varie sur (P), le cercle de diamètre $[AB]$ reste tangente a (d) .



4- $A(\frac{a^2}{4} - 1\ ;\ a)$ et $B(\frac{b^2}{4} - 1\ ;\ b)$.

- A, O et B sont colinéaire ; Donc $\det(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}) = 0$.

  $\frac{a^2b}{4} - b - \frac{b^2a}{4} + a = 0$; $(\frac{ab}{4} + 1)(a - b) = 0$.

  $\frac{ab}{4} + 1 = 0$ et $ab = -4$

- l'équation $y^2 = 4(x+1)$ donne $2y\,y' = 4$.

  La pente de la tangente à A est $y'_A = \frac{2}{a}$

  La pente de la normal à A est $-\frac{a}{2}$ et le normal à B est $-\frac{b}{2}$

  $\left(-\frac{a}{2}\right) \times \left(-\frac{b}{2}\right) = \frac{ab}{4} = -1$; Les deux lignes sont perpendiculaires et $A\hat{N}B = 90^\circ$.

  alors $N \in (\gamma)$.