Concours d'entrée 2008-2009 **Durée : 3 heures**

MATHEMATIQUES

La distribution des notes est sur 25

I- (2,5 points) Soit f une fonction dérivable définie sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$ telle que $f(I) = IR$ et pour tous a et b dans I, $f(a\times b) = f(a) + f(b)$.

1- Montrer que $f(1) = 0$. En déduire que, pour tout x dans I, $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$.

2- Pour tout a et b dans I, exprimer $f(\frac{a}{b})$ en fonction de $f(a)$ et $f(b)$.

3- On suppose, en plus, que pour tout x dans $]0\,;1[$, $f(x) < 0$.

a) Montrer que f est strictement croissante sur I. Justifier que f admet une fonction réciproque g.

b) Montrer que, pour tout a et b dans IR, $g(a+b) = g(a)\times g(b)$ et exprimer $g(-a)$ en fonction de $g(a)$.

II- (3,5 points) On dispose de 3 urnes U, V et W contenant chacune n boules identiques ($n \in IN$ et $n \geq 4$) telles que :

Quatre boules de l'urne U sont rouges et les autres sont blanches ; Une boule de l'urne V est rouge et les autres sont blanches ; deux boules de l'urne W sont rouges et les autres sont blanches.

Le jeu consiste à jeter un dé parfait, puis :

- Si le dé présente un 4, le joueur tire au hasard une boule de l'urne U.
- Si le dé présente un nombre pair autre que 4, le joueur tire au hasard une boule de l'urne V.
- Si le dé présente un nombre impair, le joueur tire au hasard une boule de l'urne W.

On considère les événements : A : " le dé présente un 4 " ; B : " le dé présente un nombre pair autre que 4 ".
C : " le dé présente un nombre impair " et R : " La boule tirée est rouge ".

1- a) Calculer les probabilités conditionnelles $p(R/A)$, $p(R/B)$ et $p(R/C)$ en fonction de n.

b) Montrer que $p(R) = 2/n$ et que les événements C et R sont indépendants.

2- a) Calculer la probabilité que le dé présente un 4 sachant que la boule tirée est rouge.

b) Calculer la probabilité que le dé présente un nombre impair sachant que la boule tirée est blanche.

3- a) Déterminer n tel que $p(R) > 0,4$.

b) Déterminer n tel que la probabilité de l'événement " la boule tirée est blanche " soit le double de celle de l'événement " la boule tirée est rouge ".

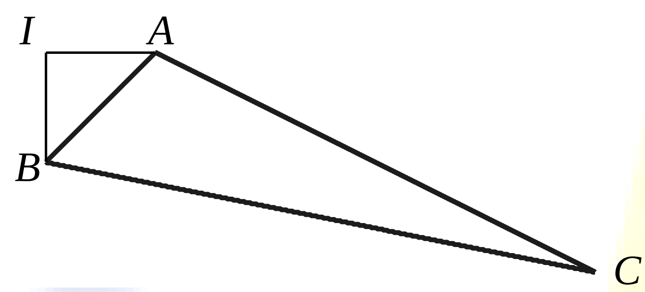
4- On suppose que $n = 6$. Le jeu est répété 10 fois en replaçant, chaque fois, la boule tirée dans l'urne. Calculer la probabilité de l'événement " au moins l'une des 10 boules tirées est rouge ".

III- (5,5 points) On considère un triangle direct ABC. Soit I le point tel que IBA soit direct et rectangle isocèle en I.

1- Soit R la rotation de centre I qui transforme A en B.

a) Déterminer l'angle de R.

b) Construire l'image D de C par R et déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{BD})$.



2- a) Construire le centre J de la rotation R' d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme A en D.

b) Montrer que $R'(C) = B$.

3- Soit M le milieu de $[AC]$ et N celui de $[BD]$. Montrer que $IMJN$ est un carré.

4- Soit P et Q les points tels que $IAPB$ et $ICQD$ soient deux carrés <u>indirects</u>.

a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S de centre I qui transforme A en P.

b) Déterminer $S(C)$ et $S(M)$. Que peut-on en déduire pour le point J ?

5- On suppose dans cette partie que le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v})$ et que les affixes de A, B, C sont $z_A = 2-i$, $z_B = 1-2i$, $z_C = 6-3i$.

a) Déterminer l'expression complexe de la rotation R. En déduire l'affixe de son centre I.

b) Déterminer l'affixe de D.

c) Déterminer l'expression complexe de la similitude S.

d) Déterminer l'affixe de chacun des points J, P et Q et vérifier que J est le milieu de $[PQ]$

IV- (5,5 points) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j})$.

A- On considère le point $M(4\cos\alpha\,;2\cos 2\alpha)$, où α est un nombre réel .

Montrer que , lorsque α varie , l'ensemble de M est une <u>partie</u> d'une parabole que l'on déterminera .

B- Soit (P) la parabole d'équation $x^2 = 4(y+2)$.

1- Déterminer le foyer F et la directrice (d) de (P). Tracer (P).

2- On considère les points A et B d'abscisses respectives α et β de (P).

Soit (d_1) la tangente à (P) en A et (d_2) la tangente à (P) en B.

a) Déterminer une équation de chacune des droites (d_1) et (d_2).

b) Montrer que (d_1) et (d_2) se coupent au point $T\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\,;\dfrac{\alpha\beta-8}{4}\right)$.

3- Montrer que si (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires alors T appartient à la directrice (d) de (P) et que (AB) passe par le foyer F de (P).

4- On suppose que (d_1) et (d_2) ne sont pas perpendiculaires ; soit θ une mesure de leur angle aigu.

Montrer l'une seulement des deux relations : $\cos\theta = \dfrac{|\alpha\beta+4|}{\sqrt{(4+\alpha^2)(4+\beta^2)}}$ ou $\tan\theta = 2\left|\dfrac{\alpha-\beta}{4+\alpha\beta}\right|$.

5- a) Montrer que , si α et β varient tels que $\theta = 45^\circ$, alors $4(\alpha+\beta)^2 - (\alpha\beta+12)^2 = -128$.
En déduire que T varie sur une hyperbole (H) dont on déterminera l'équation.

b) Montrer que le foyer F et la directrice (d) de (P) sont aussi un foyer et une directrice de (H).

V- **(8 points)** ***A-*** On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(0)=0$ et $f(x) = x(\ell n\, x)^2 - 2x\,\ell n\, x + 2x$ pour $x \neq 0$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

1- a) Montrer que f est continue en 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$. En déduire la tangente à (C) au point $O(0\,;0)$.

2- Dresser le tableau de variations de f .

3- Déterminer une équation de la tangente (d) à (C) au point E d'abscisse e . Tracer (C) et (d).

4- a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on déterminera le domaine de définition.

b) Tracer la courbe représentative (C') de f^{-1} dans le même repère que (C) .

c) Montrer que (C') est tangente à $x'x$ et à (C) en deux points que l'on déterminera.

5- a) Déterminer le point d'inflexion de (C') .

b) Déterminer le point L de (C') où la tangente à (C') est parallèle à (d).

c) Déterminer les coordonnées de L dans le repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$ tel que $\left\|\vec{u}\right\| = 1$ et $(\vec{i}\,;\vec{u}\,) = 45^\circ$.

B- On considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_p^e x(\ell n x)^n\,dx$ où $n \in IN$ et $p \in\,]0\,;e[$. Soit $J_n = \lim\limits_{p\to 0^+} I_n$.

1- a) A l'aide d'une intégration par parties , montrer que , pour tout n dans IN , $I_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left[e^2 - p^2(\ell n\, p)^{n+1} - (n+1)I_n\right]$.

b) Calculer I_0 . En déduire I_1 et I_2 , puis calculer J_0, J_1 et J_2 .

2- a) Exprimer l'intégrale $J = \displaystyle\int_p^e f(x)\,dx$ en fonction de I_0 I_1 et I_2 puis calculer $\lim\limits_{p\to 0^+} J$.

b) Calculer l'aire du domaine limité par (C), $x'x$, $y'y$ et la droite d'équation $x = e$.

c) Calculer l'aire S du domaine fermé limité par (C) et (C'). Vérifier que S est la moitié de l'aire du carré de diagonale $[OE]$ où $E(e\,;e)$

Concours d'entrée 2008-2009 — **Solution de Mathématique** — **Durée : 3 heures**

Exercice 1

1- $f(1)=f(1\times 1)=f(1)+f(1)=2f(1)$. Donc $f(1)=0$.

Pout tout x dans I , $f(\frac{1}{x})+f(x)=f(x\times\frac{1}{x})=f(1)=0$. Donc $f(\frac{1}{x})=-f(x)$

2- Pour tout a et b dans I , $f(\frac{a}{b})=f(a\times\frac{1}{b})=f(a)+f(\frac{1}{b})=f(a)-f(b)$.

3- a) Pour tout a et b dans I , si $a<b$ alors $\frac{a}{b}\in\,]0\,;1[$ et $f(\frac{a}{b})<0$.

Par conséquent , $f(a)-f(b)<0$ et $f(a)<f(b)$. Donc, f est strictement croissant sur I .

Fonction inverse

- f est continue sur I alors f est différentiable sur I .
- f est strictement croissant sur I .

Donc, f a une fonction inverse g définie sur $f(I)=IR$.

b) Pour tout a et b dans IR , $g(a)\in I$ et $g(b)\in I$.

Donc, $f\left(g(a)\times g(b)\right)=f\left(g(a)\right)+f\left(g(b)\right)=a+b$.

Par conséquent, $g(a)\times g(b)=f^{-1}(a+b)=g(a+b)$.

Pour tout a dans IR , $g(0)=g(a-a)=g(a)\times g(-a)$ ou $g(0)=1$ alors $f(1)=0$.

Finalement , $g(a)\times g(-a)=1$ et $g(-a)=\dfrac{1}{g(a)}$.

Exercise 2

1- a) Si A est réalisé alors la balle est tirée de l'urne U qui contient n balles sachant que 4 sont rouge ;

Donc, $p(R/A)=\frac{4}{n}$.

Si B est réalisé alors la balle est tirée de l'urne V qui contient n balles sachant que 1 sont rouge;

Donc, $p(R/B)=\frac{1}{n}$.

Si C est réalisé alors la balle est tirée de l'urne W qui contient n balles sachant que 2 sont rouge;

Donc , $p(R/C)=\frac{2}{n}$.

b) $p(R)=p(A)\times p(R/A)+p(B)\times p(R/B)+p(C)\times p(R/C)$.

$=\frac{1}{6}\times\frac{4}{n}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{n}=\frac{2}{n}$.

$p(R)=p(R/C)=\frac{2}{n}$; donc l'évènement C et R sont indépendant

2- a) $p(A/R)=\frac{p(A\cap R)}{p(R)}=\frac{p(A)\times p(R/A)}{p(R)}=\frac{1}{6}\times\frac{4}{n}\div\frac{2}{n}=\frac{1}{3}$.

b) $p(C/W)=p(C/\overline{R})=\frac{p(C\cap\overline{R})}{1-p(R)}=\frac{p(C)-p(C\cap R)}{1-p(R)}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{n}\right)\div\left(1-\frac{2}{n}\right)=\frac{n-2}{2(n-2)}=\frac{1}{2}$.

Ou l'évènement C et R sont indépendant, l'évènement C et $\overline{R}$ sont indépendant .

donc $p(C/W)=p(C/\overline{R})=p(C)=\frac{1}{2}$.

3- a) $p(R)>0.4$; $\frac{2}{n}>0.4$; $n<5$. donc $n=4$ ($n\in IN$ et $n\geq 4$)

b) $p(\overline{R})=2p(R)$; $p(R)=\frac{1}{3}$; $n=6$.

4- Quand $n=6$, $p(R)=\frac{1}{3}$ et $p(\overline{R})=\frac{2}{3}$.

Les deux évènements " au moins un des dix boules tirées sont rouges " et " les 10 boules tirées sont de couleur blanche " sont opposées. La probabilité demander est : $p=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$.

<u>Exercise 3</u>

1- Soit R la rotation de centre I qui transforme A en B .

a) $R(A)=B$ et $(\overrightarrow{IA}\ ;\ \overrightarrow{IB})=-\frac{\pi}{2}\quad(2\pi)$. Donc l'angle de R est $-\frac{\pi}{2}$.

b) La construction de D tel que $IC=ID$ et $(\overrightarrow{IC}\ ;\ \overrightarrow{ID})=-\frac{\pi}{2}\quad(2\pi)$.

$R(A)=B$ et $R(C)=D$; donc $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{BD})=-\frac{\pi}{2}\quad(2\pi)$.

2- Soit R' la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme A en D .

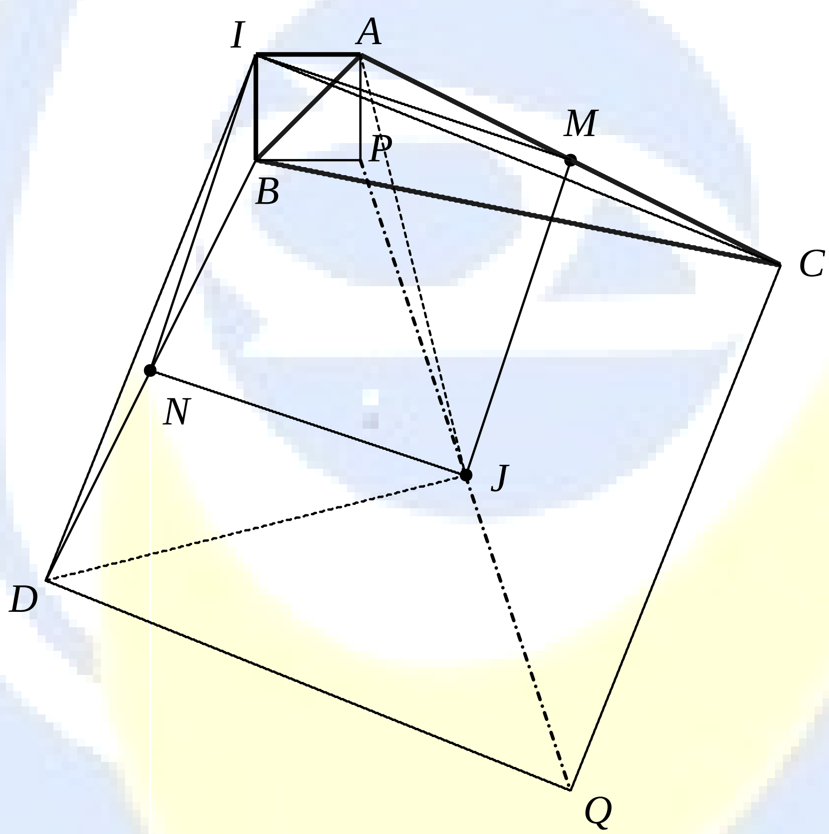
a) Le centre J de R' est tel que $JA = JD$ et $(\overrightarrow{JA}\ ;\ \overrightarrow{JD}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

b) $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$, $AC = DB$ et $R'(A) = D$. donc $R'(C) = B$.

3- Soit M le milieu de $[AC]$ et N de $[BD]$.

$R([AC]) = R'([AC]) = [BD]$; donc $R(M) = R'(M) = N$.

Par conséquent, les triangles IMN et JMN sont isocèles, ayant des angles droites et le même hypoténuse $[MN]$. donc $IMJN$ est un carré .



4-a) $IAPB$ est un carré indirect. donc $IP = \sqrt{2}\, IA$ et $(\overrightarrow{IA}\ ;\ \overrightarrow{IP}) = -\frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$.

Alors $S = Sim(I\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ -\frac{\pi}{4})$.

b) $ICQD$ est un carré indirect. donc $IQ = \sqrt{2}\,IC$ et $(\overrightarrow{IC}\ ;\ \overrightarrow{IQ}) = -\frac{\pi}{4}\quad (2\pi)$.

alors $S(C) = Q$.

$IMJN$ est un carré indirect. donc $IJ = \sqrt{2}\,IM$ et $(\overrightarrow{IM}\ ;\ \overrightarrow{IJ}) = -\frac{\pi}{4}\quad (2\pi)$.

Donc $S(M) = J$.

$S(A) = P$, $S(C) = Q$, $S(M) = J$ et M le milieu de $[AC]$.

donc J est le milieu de $[PQ]$.

5- le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O\ ;\ \overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v})$ tel que $z_A = 2 - i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = 6 - 3i$.

a) La relation complexe de la rotation R d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est $z' = -\,i\,z + b$ tel que $z_B = -\,i\,z_A + b$.

Alors $b = 2$ et $z' = -\,i\,z + 2$.

L'affixe de son centre I de R est $z_I = \frac{2}{1+i} = 1 - i$.

b) $R(C) = D$; donc $z_D = -\,i\,z_C + 2 = -1 - 6i$

c) La relation complexe de la similitude $S(I\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ -\frac{\pi}{4})$ est $z' = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}z + (1 - \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}})z_I$

$z' = (1-i)z + i(1-i)$; $z' = (1-i)z + 1 + i$.

d) $S(M) = J$, alors $z_J = (1-i)z_M + 1 + i$ ou $z_M = \frac{1}{2}(z_A + z_C) = 4 - 2\,i$; donc $z_J = 3 - 5\,i$.

$S(A) = P$, alors $z_P = (1-i)z_A + 1 + i = 2 - 2\,i$.

$S(C) = Q$, alors $z_Q = (1-i)z_C + 1 + i = 4 - 8\,i$.

$z_J = \frac{1}{2}(z_P + z_Q)$. donc J est le milieu de $[PQ]$.

Exercise 4

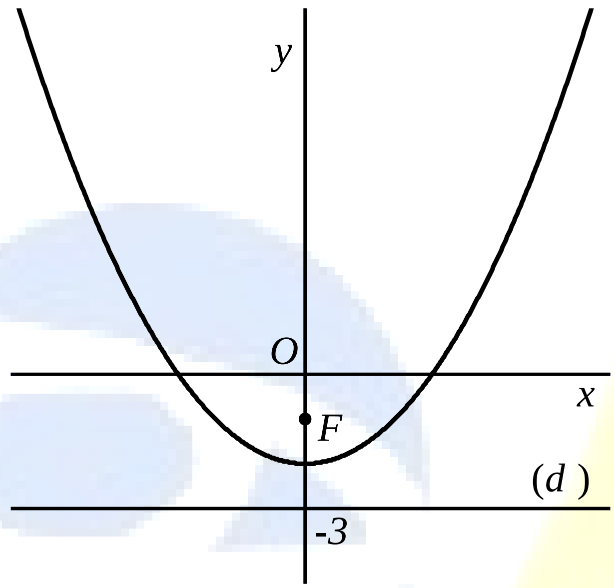
A- $M(4\cos\alpha\ ;\ 2\cos 2\alpha)$, où α est un nombre réel .

$2\cos 2\alpha = 2(2\cos^2\alpha - 1) = 4\cos^2\alpha - 2$; alors , lorsque α varies , le point M varie sur le parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$.

lorsque α de trace IR , l'abscisse de M trace l'intervalle $[-4\,;\,4]$. L'ensemble de M est une partie d'une parabole d'équation $y=\frac{1}{4}x^2-2$ qui correspond à $x\in[-4\,;\,4]$.

B- (P) est une parabole d'équation $x^2=4(y+2)$.

1- Le foyer de (P) est $(0\,;-2)$;
L'axe de focale est $y'y$ et le paramètre est 2.
donc :
le foyer de (P) est $F(0\,;-1)$ et
la directrice est $(d): y=-3$.
Tracer (P).



2- $A(\alpha\,;\frac{1}{4}\alpha^2-2)$ et $B(\beta\,;\frac{1}{4}\beta^2-2)$.
(d_1) est le tangent de (P) à A et (d_2) est le tangent de (P) à B.

a) les pentes de (d_1) et (d_2) sont respectivement $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\beta}{2}$.

(d_1) : $y=\frac{\alpha}{2}x-\frac{\alpha^2}{4}-2$ et

(d_2) : $y=\frac{\beta}{2}x-\frac{\beta^2}{4}-2$.

b) $(d_1)\cap(d_2)$: $2(\alpha-\beta)x=\alpha^2-\beta^2$; $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$.

(d_1) et (d_2) se coupent au point $T\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\,;\frac{\alpha\beta-8}{4}\right)$.

3- (d_1) et (d_2) sont perpendiculaire si et seulement si $\frac{\alpha}{2}\times\frac{\beta}{2}=-1$; qui est $\alpha\beta=-4$.

Si $\alpha\beta=-4$, alors $y_T=-3$ et T appartient à la directrice (d) de (P) .

$\overrightarrow{FA}\,(\alpha\,;\frac{\alpha^2}{4}-1)$ et $\overrightarrow{FB}\,(\beta\,;\frac{\beta^2}{4}-1)$.

$Det(\overrightarrow{FA}\,;\overrightarrow{FB})=\alpha\left(\frac{\beta^2}{4}-1\right)-\beta\left(\frac{\alpha^2}{4}-1\right)=\frac{\alpha\beta}{4}(\beta-\alpha)+\beta-\alpha$.

Si $\alpha\beta = -4$, alors $Det(\overrightarrow{FA}\ ;\ \overrightarrow{FB}) = 0$ et (AB) passe par le foyer F de (P)

4- (d_1) et (d_2) ne sont pas perpendiculaires et θ est une mesure de leur angle aigu.

- $\overrightarrow{n_1}(\alpha\ ;-2)$ est un vecteur normal de (d_1) et $\overrightarrow{n_2}(\beta\ ;-2)$ est un vecteur normal de (d_2) ; alors ,

$$\cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left\|\overrightarrow{n_1}\right\|\times\left\|\overrightarrow{n_2}\right\|} = \frac{|\alpha\beta+4|}{\sqrt{(4+\alpha^2)(4+\beta^2)}} .$$

- Les pentes de (d_1) et (d_2) sont respectivement $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\beta}{2}$; alors ,

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}}{1+\frac{\alpha}{2}\times\frac{\beta}{2}}\right| = 2\left|\frac{\alpha-\beta}{4+\alpha\beta}\right| .$$

5- a) Si α et β varies tel que $\theta = 45^\circ$, alors $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ou $\tan\theta = 1$) .

donc , $4\alpha^2 + 4\beta^2 - \alpha^2\beta^2 - 16\alpha\beta = 16$.

$4(\alpha+\beta)^2 - (\alpha\beta+12)^2 = 4\alpha^2 + 4\beta^2 - \alpha^2\beta^2 - 16\alpha\beta - 144 = 16 - 144 = -128 = \text{constante}$.

Les coordonnées x et y de T sont tel que $\alpha+\beta = 2x$ et $\alpha\beta = 4y+8$.

si α et β varies tel que $\theta = 45^\circ$, alors $x^2 - (y+5)^2 = -8$. T varie sur hyperbole (H) d'équation $(y+5)^2 - x^2 = 8$.

b) Le centre de (H) est le point $(0\ ;-5)$;

L'axe focale de (H) est l'axe de y , $a = b = 2\sqrt{2}$ et $c = a\sqrt{2} = 4$;

Le foyer de (H) est le point $(0\ ;-5+c)$ et le foyer de F de (P) ,

La directrice correspond est la droite de l'équation $y = -5 + \frac{a^2}{c}$; $y = -3$ qui est la directrice (d) de (P).

<u>Exercise 5</u>

A- La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x(\ell n x)^2 - 2x\ell n x + 2x$ pour $x \neq 0$.

1- a) $\lim\limits_{x\to0^+} x\ell n x = \lim\limits_{x\to0^+} x(\ell n x)^2 = 0$; donc , $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0 = f(0)$ et f est continue en 0.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[(\ell n\, x)^2 - 2\,\ell n\, x + 2\right] = +\infty$. La tangent de (C) à $O(0\,;0)$ est $y'y$.

2- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\, x\,\ell n\, x(\ell n\, x - 2) + 2x \,\right] = +\infty$

Pour $x \neq 0$, $f\,'(x) = (\ell n\, x)^2$.

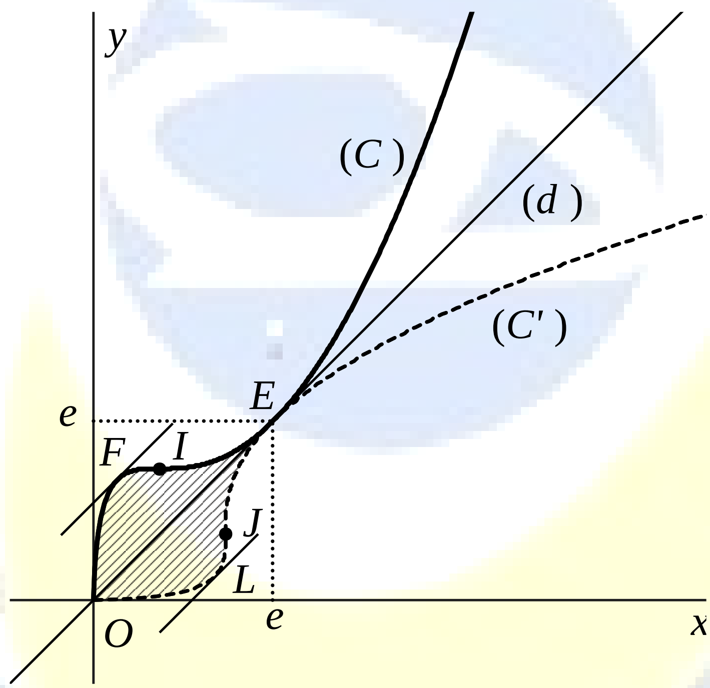
x	0		1		$+\infty$
$f\,'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	2	↗	$+\infty$

3- $f(e) = e$ et $f\,'(e) = 1$; (d) : $y = x$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\, \ell n\, x(\,\ell n\, x - 2) + 2 \,\right] = +\infty$.

(C) a $+\infty$, une direction asymptotique parallèle à $y'y$.

tracer (C) et (d).



4- a) f est continue est strictement croissant ; il admet une fonction inverse f^{-1} définie sur $f([0\,;+\infty[)$ qui est sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) (C') est le symétries de (C) par rapport à la droite (d) de l'équation $y = x$.

c) (C) est tangent à $y'y$ en $O(0\,;0)$; Par symétrie par rapport à (d), (C') est tangent à $x'x$ en $O(0\,;0)$.

(C) est tangent à (d) en $E(e\,;\,e)$; alors (C') est tangent à (d) en $E(e\,;\,e)$.
(C') et (C) ont le même tangent en E ; ils sont tangent à ce point .

5- a) Pour $x \neq 0$, $f''(x) = 2\dfrac{\ell n\, x}{x}$.

$f''(x)$ change le signe à 1 . Donc (C) admet le point $I(1\,;\,2)$ comme un point d'inflexion .
Par symétrie par rapport à la droite (d), (C') admet le point $J(2\,;\,1)$ comme un point d'inflexion

b) $f'(x) = 1$ est équivalente à $\ell n\, x = 1$ ou $\ell n\, x = -1$, qui est $x = e$ ou $x = \dfrac{1}{e}$.

La tangente à (C) au point $F\left(\dfrac{1}{e}\,;\,\dfrac{5}{e}\right)$ est parallèle à (d) ; alors , Par symétrie par rapport à la droite (d), La tangente à (C') au point $L\left(\dfrac{5}{e}\,;\,\dfrac{1}{e}\right)$ est parallèle à (d).

Ou

La tangente à (C') au point de l'abscisse x est parallèle à (d) si et seulement si $x \neq e$ et $\left(f^{-1}\right)'(x) = 1$; mais $\left(f^{-1}\right)'(x) \times f'\left(f^{-1}(x)\right) = 1$; donc $f'\left(f^{-1}(x)\right) = 1$;

$\ell n\left(f^{-1}(x)\right) = 1$ or $\ell n\left(f^{-1}(x)\right) = -1$; $f^{-1}(x) = e$ or $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{e}$;

$x = f(e) = e$ or $x = f(\dfrac{1}{e}) = \dfrac{5}{e}$.

Finalement, la tangente à (C') au point $L\left(\dfrac{5}{e}\,;\,\dfrac{1}{e}\right)$ est parallèle à (d).

c) Les coordonnées de L dans le repère orthonormé direct $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\,)$ sont x et y tel que

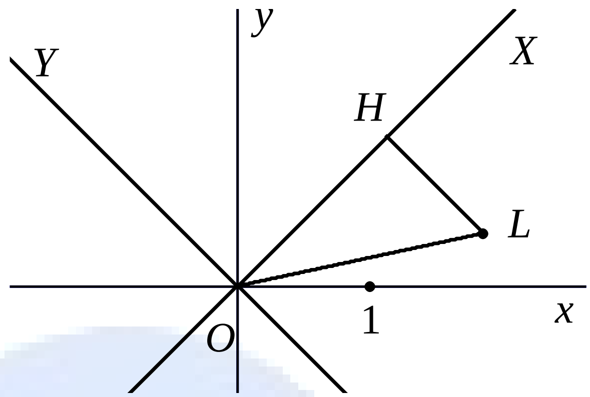
$$x = \frac{5}{e}\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) - \frac{1}{e}\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{e} \quad \text{et} \quad y = \frac{5}{e}\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \frac{1}{e}\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{-2\sqrt{2}}{e}.$$

Ou

La distance du L à (d) est $LH = \dfrac{2\sqrt{2}}{e}$;

donc $y = \dfrac{-2\sqrt{2}}{e}$.

$x = OH = \sqrt{OL^2 - LH^2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{e}$.



.

B- $I_n = \displaystyle\int_p^e x(\ell n x)^n\, dx$ ou n est un nombre naturel et p est un nombre réel appartient à $]0\,;\,e[$.

1- a) Soit $U = (\ell n x)^{n+1}$ et $V' = x$ alors , $U' = \dfrac{n+1}{x}(\ell n x)^n$ et $V = \dfrac{x^2}{2}$.

À l’aide une intégration par parties,

$$I_{n+1} = \left[\frac{x^2}{2}(\ell n x)^{n+1}\right]_p^e - \frac{n+1}{2}\int_p^e x(\ell n x)^n\, dx = \frac{1}{2}\left[e^2 - p^2(\ell n\, p)^{n+1} - (n+1)I_n\right].$$

b) $I_0 = \displaystyle\int_p^e x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_p^e = \frac{1}{2}(e^2 - p^2)$.

Pour $n = 0$, $I_1 = \dfrac{1}{2}\left[e^2 - p^2\, \ell n\, p - I_0\right] = \dfrac{1}{4}(e^2 + p^2) - \dfrac{1}{2}p^2\, \ell n\, p$;

Pour $n = 1$, $I_2 = \dfrac{1}{2}\left[e^2 - p^2(\ell n\, p)^2 - 2I_1\right] = \dfrac{1}{4}(e^2 - p^2) - \dfrac{1}{2}p^2(\ell n\, p)^2 + \dfrac{1}{2}p^2\, \ell n\, p$.

$J_0 = \displaystyle\lim_{p\to 0^+} I_0 = \lim_{p\to 0^+} \frac{1}{2}(e^2 - p^2) = \frac{1}{2}e^2$.

$J_1 = \displaystyle\lim_{p\to 0^+} I_1 = \frac{1}{4}e^2$.

$J_2 = \displaystyle\lim_{p\to 0^+} I_2 = \frac{1}{4}e^2$.

2- a) $J = \int_p^e f(x)\,dx = I_2 - 2I_1 + 2I_0$; $\lim_{p \to 0^+} J = J_2 - 2J_1 + 2J_0 = \frac{3}{4}e^2$

b) l'aire du domaine limité par (C), $x'x$, $y'y$ et la droite d'équation $x = e$.

$A = \lim_{p \to 0^+} J$ unité d'aire ; $A = \frac{3}{4}e^2$ unité d'aire .

c) Par symétrie par rapport à la droite (d), $S = 2S_1$ ou S_1 est l'aire du domaine limité par (C), (d), $y'y$ est la droite d'équation $x = e$.

$S = 2[A - A_1]$ où A_1 est la surface du triangle OEF ; $A_1 = \frac{1}{2}e^2$ unité d'aire .

Donc, $S = 2\left(\frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{2}e^2\right) = \frac{1}{2}e^2$ unité d'aire $= \frac{1}{2}$ l'aire du carré de diagonale $[OE]$.